幾何入門 演習問題 5（2014 年 5 月 16 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. $L := S^1 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ とおき，L が囲む有界領域を Ω とする．
   (1) $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$ は L を表す正則なパラメータであることを示せ．
   (2) $\boldsymbol{l}(t)$ における単位速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ と単位法ベクトル $\boldsymbol{n}(t)$ を求めよ．
   (3) Ω を求めよ．(2) で求めた $\boldsymbol{n}(t)$ は Ω の内側から外側に向かうベクトルであることを確認せよ．
2. $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ y = 0 \text{ または } 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ または } 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ とおく．
   (1) L を図示せよ．
   (2) L を表す区分的に正則なパラメータで，L が囲む有界領域の境界の向きを表すものを一つ求めよ．さらに，その周期を求めよ．
3. $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |\boldsymbol{u}| \leq 2\}$ とおく．
   (1) Ω を図示せよ．Ω は有界領域であることを示せ．
   (2) Ω の境界 $\partial\Omega$ を求めよ．$\partial\Omega$ の向きを表すような正則パラメータを一つ求めよ．
   (3) Ω の補集合 $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{u} \notin \Omega\}$ は有界領域ではないことを示せ．
4. $L := \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}$ とおく．
   (1) $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ は L を表す正則パラメータであることを示せ．
   (2) $\boldsymbol{m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{m}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ t^3 \end{pmatrix}$ も L を表すパラメータであることを示せ．$\boldsymbol{m}$ が正則でない理由を述べよ．
5. 次の曲線 L について，（区分的に）正則なパラメータ $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を一つ求め，それについて，各 $\boldsymbol{l}(t)$ における単位接ベクトルと単位法ベクトルを求めよ．閉曲線の場合は周期も求めよ．
   (1) $L := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$, ただし $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級関数
   (2) $L := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$
   (3) $L := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 2y^2 = 4\}$（参考：信州大学理学部平成 26 年度入試問題）
6. 正則な道 L の正則パラメータ $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ について，この二つが同じ向きを表すとき，$\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{m}$ と書くことにする．$\approx$ は**同値関係**であることを示せ．すなわち，以下のことを示せ：
   (i) $\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{l}$
   (ii) $\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{m}$ ならば $\boldsymbol{m} \approx \boldsymbol{l}$
   (iii) $\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{m}$ かつ $\boldsymbol{m} \approx \boldsymbol{n}$ ならば $\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{n}$
7. $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t - \cos t \\ 1 - \sin t \end{pmatrix}$ でパラメータ付けされる道 $L = \boldsymbol{l}(\mathbb{R})$ を**サイクロイド** (cycloid) という．L を図示せよ．このパラメータは正則か？
8. $0 \leq a \leq 1$ を定数とし，$\boldsymbol{l}_a(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}$ で定まる曲線を考える．
   (1) $0 \leq a < \dfrac{1}{3}$ のとき，$\boldsymbol{l}_a$ は滑らかな閉曲線を表すことを示せ．その周期を求めよ．
   (2) $a = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\dfrac{d\boldsymbol{l}_a}{dt}(t) = \boldsymbol{0}$ となる t を求めよ．$\dfrac{1}{3} \leq a$ のとき，$\boldsymbol{l}_a$ は滑らかな曲線を表すか？
9. 閉曲線 $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は，連続写像 $S^1 \to \mathbb{R}^2$ ともみなせることを示せ．（ヒント：$\boldsymbol{l}$ の周期を T とするとき，$\boldsymbol{m} : S^1 \to \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{m}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} := \boldsymbol{l}(T\theta/2\pi)$ で定め，well-defined であることを確かめる）
10. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を，滑らかな閉曲線 $L_1, \ldots, L_k$ で囲まれた有界領域とする．境界 $\partial\Omega = L_1 \cup \cdots \cup L_k$ の向きは，法ベクトルが Ω の内側から外側に向かうような向きとする，と約束した．ところで，そもそも「内側から外側に向かう」とは（直感的には明らかだろうが）厳密にはどのように定義したらよいか？

（提出の必要はありません）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html

幾何入門 レポート問題 5（2014 年 5 月 16 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$ で表される道 $L := \boldsymbol{l}(\mathbb{R})$ を図示せよ．L は滑らかな閉曲線，あるいは区分的に滑らかな閉曲線か？

（5/23 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html