幾何入門 演習問題 6（2014 年 5 月 23 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ と C^∞ 級関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を考える．次の等式が成り立つことを示せ．
   (1) $\mathrm{div}(a\boldsymbol{V} + b\boldsymbol{W}) = a\,\mathrm{div}\boldsymbol{V} + b\,\mathrm{div}\boldsymbol{W}$, $\mathrm{rot}(a\boldsymbol{V} + b\boldsymbol{W}) = a\,\mathrm{rot}\boldsymbol{V} + b\,\mathrm{rot}\boldsymbol{W}$ （ただし $a, b \in \mathbb{R}$ は定数）
   (2) $\mathrm{div}(f\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}(f) \cdot \boldsymbol{V} + f\mathrm{div}\boldsymbol{V}$
   (3) $\mathrm{rot}(f\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}(f) \cdot \widetilde{\boldsymbol{V}} + f\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$, ただし $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$ とするとき，$\widetilde{\boldsymbol{V}} := \begin{pmatrix} V_2 \\ -V_1 \end{pmatrix}$
   (4) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ （注：このことから「$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} \neq 0 \implies \boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ をみたす f は存在しない」がわかる）
   (5) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ （注：$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ を **Laplace 方程式**，その解 f を**調和関数** (harmonic function) と呼ぶ）
2. $a, b \in \mathbb{R}$ を定数とする．$L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = 1\}$ で囲まれた有界領域を Ω とおき，ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x+y \\ -y \end{pmatrix}$ を考える．
   (1) L を表す正則パラメータ $\boldsymbol{l}$ で，$\partial\Omega$ の向きを表すものを一つ求めよ．また，その周期 T を求めよ．
   (2) (1) で定めたパラメータに対し，$\boldsymbol{l}(t) \in L$ における単位法ベクトル $\boldsymbol{n}(t)$ を求めよ．
   (3) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{l}$ と $\displaystyle\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{V}\, dxdy$ をそれぞれ計算し，Gauss の発散定理が成り立っていることを確認せよ．
   (4) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ と $\displaystyle\int_\Omega \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\, dxdy$ をそれぞれ計算し，Green の公式が成り立っていることを確認せよ．
3. 次の領域 Ω とベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，Gauss の発散定理と Green の公式が成り立つことを直接計算で確かめよ．
   (1) $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x + 2xy \\ x - y^2 \end{pmatrix}$
   (2) $\square_r := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq r,\ |y| \leq r\}$ とするとき，$\Omega := \square_2 \setminus \square_1$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}$
   (3) $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |\boldsymbol{u}| \leq 2\}$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$
4. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級関数で，全単射かつ $h' < 0$ をみたすとする．滑らかな曲線 L を表す正則パラメータ $\boldsymbol{l}$ に対し，$\widetilde{\boldsymbol{l}} := \boldsymbol{l} \circ h$ とおく．
   (1) $\boldsymbol{l}$ と $\widetilde{\boldsymbol{l}}$ は L に異なる向きを定めることを示せ．またベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{\widetilde{\boldsymbol{l}}} \boldsymbol{V} \cdot d\widetilde{\boldsymbol{l}}$ を示せ．
   (2) $\boldsymbol{l}(t), \widetilde{\boldsymbol{l}}(t)$ における単位法ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{n}(t), \widetilde{\boldsymbol{n}}(t)$ とするとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{l} = -\int_{\widetilde{\boldsymbol{l}}} \boldsymbol{V} \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}\, d\widetilde{\boldsymbol{l}}$ を示せ．
5. $i = 1, 2$ に対し，$L_i := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}| = i\}$ とおく．L_i を表す正則パラメータ $\boldsymbol{l}_i$ $(i = 1, 2)$ を，L_i が囲む有界領域の境界の向きを表すように取る．$\boldsymbol{l}_i(t)$ における単位法ベクトルを $\boldsymbol{n}_i(t)$ とする．
   (1) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$ をみたすとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}_1} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_1\, d\boldsymbol{l}_1 = \int_{\boldsymbol{l}_2} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_2\, d\boldsymbol{l}_2$ を示せ．（ヒント：$\boldsymbol{l}_1$ は L_1, L_2 が囲む有界領域 $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |\boldsymbol{u}| \leq 2\}$ の境界の向きと反対の向きを表すことに注意し問題 4 を使う）
   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$ をみたすとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}_1} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}_1 = \int_{\boldsymbol{l}_2} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}_2$ を示せ．
6. L を向き付けられた滑らかな閉曲線とし，$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ をその向きを表す正則パラメータとする．$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ に対応する単位法ベクトルを $\boldsymbol{n}_l, \boldsymbol{n}_m$ とするとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_l\, d\boldsymbol{l} = \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_m\, d\boldsymbol{l}$ を示せ．
7. （教科書 p. 51 参照：「関数論」で当該箇所を学んだ後に考えてみてください）
   $z \in \mathbb{C}$ と関数 $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を実部と虚部に分け，$z = x + \sqrt{-1}\,y$, $h(z) = f(x, y) + \sqrt{-1}\,g(x, y)$ と書く．
   (1) $\boldsymbol{V} := \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{W} := \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}$ とおくとき,「h が正則関数 $\iff$ $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \mathrm{rot}\boldsymbol{W} = 0$」を示せ．
   (2) 曲線 $\boldsymbol{l} : [a, b] \to \mathbb{C}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} h(z)dz = \int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} + \sqrt{-1} \int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{l}$ を示せ．

（提出の必要はありません）

幾何入門 レポート問題 6（2014 年 5 月 23 日）

担当：境 圭一

$L \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな閉曲線とし，L が囲む有界領域 Ω は原点 $\mathbf{0}$ を内部に含むとする．L を表す正則パラメータ $\boldsymbol{l}$ で，$\partial\Omega$ の向きを表すものを取る．$\boldsymbol{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．（ヒント：Green の公式を使うが，$\boldsymbol{V}$ は原点で定義されていないので，答は "$\displaystyle\int_{\Omega} \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\,dxdy$" ではない．5/23 の問題 4. (1) と 5. (2) も参照）

（5/30 の 3 限開始時までに提出してください）

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html`

2. (1) について．解説したときに符号を間違えてしまったので訂正します．
例えば，$\widetilde{\boldsymbol{l}}(t) := \begin{pmatrix} a+\cos(-t) \\ b+\sin(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\cos t \\ b-\sin t \end{pmatrix}$ は $\partial\Omega$ の向きを表しません．なぜなら，

$$\widetilde{\boldsymbol{l}}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{n}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

となるので，$\widetilde{\boldsymbol{n}}(t)$ は $\widetilde{\boldsymbol{l}}(t)$ において Ω の外から内に向かうベクトルになっています．