幾何入門 演習問題 7（2014 年 5 月 30 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ領域や曲線はすべて $\mathbb{R}^2$ 内のものとし，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. 領域 $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ を考える．
   (1) $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (2) $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m} : [0,\pi] \to \Omega$ を，それぞれ $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{m}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ で定義する．$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ に沿った線積分を考えることにより，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる $f : \Omega \to \mathbb{R}$ は存在しないことを示せ．（定理 30 を使う）
   (3) Ω は単連結でないことを示せ．
2. 次の $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$（ポテンシャル）が存在するか調べよ．存在する場合は f を一つ求めよ．

   (1) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$　(2) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$　(3) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x^3-2xy \\ -x^2+y^4 \end{pmatrix}$　(4) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$
3. 放物線 $y = x^2$ と直線 $x + y = 1$ で囲まれる有界領域を Ω とし，$L := \partial\Omega$ とおく．
   (1) L は区分的に滑らかな閉曲線であることを示せ．
   (2) $L = \partial\Omega$ の向きを表すパラメータ $\boldsymbol{l}$ を取る．$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x-y^2 \\ x+2y \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l}$, $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
4. 周期 4π の閉曲線 $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を，$\boldsymbol{l}(t) = \begin{pmatrix} 1-\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 2\pi)$, $\boldsymbol{l}(t) = \begin{pmatrix} -1+\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $(2\pi \le t \le 4\pi)$ となるように定める．$\boldsymbol{l}$ は区分的にも滑らかな閉曲線ではないことを示せ．しかし $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2 \le 1$ または $(x+1)^2+y^2 \le 1\}$ とおくと，Gauss の発散定理 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l} = \int_{\Omega} \mathrm{div}\boldsymbol{V}\,dxdy$ が成り立つことを示せ．

（以下，今までの復習です）

5. $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{u} := (1,2,0)$, $\boldsymbol{v} := (2,-1,1)$, $\boldsymbol{w} := (0,1,3)$ が張る平行六面体の体積を求めよ．
6. 微分可能な関数 $f, \varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を考え，$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とするとき
$$\mathrm{grad}(f\circ\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}(\varphi_1)(\boldsymbol{u}) & \mathrm{grad}(\varphi_2)(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix} \mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))$$
   を示せ．ただし，ベクトルはいずれも縦ベクトルで，右辺は行列とベクトルの積である．
7. 関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ と曲線 $\boldsymbol{l} : [a,b] \to \Omega$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \mathrm{grad}(f)\cdot d\boldsymbol{l} = f(\boldsymbol{l}(b)) - f(\boldsymbol{l}(a))$ であることを示せ．また $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} (A\,\mathrm{grad}(f))\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l} = f(\boldsymbol{l}(b)) - f(\boldsymbol{l}(a))$ であることを示せ．
8. $i = 1, 2$ に対し，$L_i := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}| = i\}$ とおく．$\partial\Omega = L_1 \cup L_2$ となるような有界領域 Ω を図示せよ．L_i の正則パラメータで，$\partial\Omega$ の向きを表すようなものを一つずつ求めよ．$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ について Gauss の発散定理が成り立つことを確認せよ，（成り立たなければ，求めた正則パラメータの向きが正しくないことになる）
9. $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} \cos(t^3-t) \\ \sin(t^3-t) \end{pmatrix}$ が表す道 L を図示せよ．このパラメータから，L は滑らかな閉曲線といえるか？
10. L を向き付けられた滑らかな曲線とし，$\boldsymbol{l} : [a,b] \to \Omega$ をその向きを表す正則パラメータとする．$\overline{\boldsymbol{n}}(t) := A\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)$（$A$ は問題 7 の行列）とするとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l} = \int_a^b \boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t))\cdot\overline{\boldsymbol{n}}(t)dt$ を示せ．つまり，法線方向の線積分の計算は，（長さを 1 にしなくても）速度ベクトルをそのまま回転させたものを使えばよい．
11. L_1, L_2 は区分的に滑らかな閉曲線で，L_2 は L_1 が囲む有界領域の内部に含まれているとする．L_1, L_2 とも，それぞれが囲む有界領域の境界の向きが入っているものとする．
    (1) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$ をみたすとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}_1} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_1\,d\boldsymbol{l}_1 = \int_{\boldsymbol{l}_2} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_2\,d\boldsymbol{l}_2$ を示せ．（ヒント：5/23 の問題 5）

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=0$ をみたすとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}_1}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}_1=\int_{\boldsymbol{l}_2}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}_2$ を示せ．

12. (1) $\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}$ を曲線（のパラメータ）とするとき，$(\boldsymbol{l}(t)\cdot\boldsymbol{m}(t))'=\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\cdot\boldsymbol{m}(t)+\boldsymbol{l}(t)\cdot\dfrac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)$ を示せ．

(2) $\boldsymbol{u}\in\Omega$ において力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ を受けて運動する質量 m の物体 P を考える．時刻 t における P の位置を $\boldsymbol{p}(t)$ とすると，**運動方程式** $m\dfrac{d^2\boldsymbol{p}}{dt^2}(t)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}(t))$ が成立する．$\boldsymbol{F}=-\mathrm{grad}(f)$ であるとき，P の**エネルギー**を $E:=\dfrac{1}{2}m\left|\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}(t)\right|^2+f(\boldsymbol{p}(t))$ で定める．E は時刻 t によらず一定であることを示せ（ヒント：運動方程式を使って $\dfrac{dE}{dt}=0$ を示す）．これを**エネルギー保存則**とよぶ．（エネルギー保存則は，運動方程式から数学的に導かれる定理であることがわかる．またベクトル場 $\boldsymbol{F}$ のポテンシャルとは位置エネルギーのことである）

13. (1) $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ を $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底とする．つまり $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$, $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$. 任意の $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2$ に対し

$$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$$

を示せ．（ヒント：$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の基底なので $\boldsymbol{v}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$ とおける．両辺と $\boldsymbol{e}_i$ の内積を取る）

(2) 曲線 $\boldsymbol{l}:[a,b]\to\Omega$ に対し，簡単のため $\dot{\boldsymbol{l}}:=\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}$ とおき，$\boldsymbol{u}(t):=\dfrac{\dot{\boldsymbol{l}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{l}}(t)|^2}$, $\boldsymbol{v}(t):=A\boldsymbol{u}(t)$（$A$ は問題 7 の行列）とおく．ベクトル場 $\boldsymbol{V}:\Omega\to\mathbb{R}^2$ に対し，

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t))=\Big(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t))\cdot\dot{\boldsymbol{l}}(t)\Big)\boldsymbol{u}(t)+\Big(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t))\cdot\boldsymbol{n}(t)|\dot{\boldsymbol{l}}(t)|\Big)\boldsymbol{v}(t)$$

を示せ．このことから，線積分（その 1・その 2）とは，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t))$ を接線方向 $\boldsymbol{u}(t)$, 法線方向 $\boldsymbol{v}(t)$ に分解したときの各成分の係数を積分したものであることがわかる．

（提出の必要はありません）

補足：曲線の連続変形について．詳細は「トポロジー」で学びます．ここでは概略だけ述べておきます．
一般に，曲線 $\boldsymbol{l}:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ の**連続変形**（ホモトピー (homotopy) という）とは，連続写像 $\boldsymbol{h}:[0,1]\times[a,b]\to\mathbb{R}^2$ で，任意の $t\in[a,b]$ に対し $\boldsymbol{h}(0,t)=\boldsymbol{l}(t)$ となるようなものをいいます．$\boldsymbol{h}$ が連続とは，$\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}$ と書いたとき，h_1,h_2 がともに二変数の連続関数であることを指します．$\boldsymbol{l}_s(t):=\boldsymbol{h}(s,t)$ とおくと，各 $s\in[0,1]$ に対し $\boldsymbol{l}_s:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ は曲線で，s を動かすと，$\boldsymbol{l}_0=\boldsymbol{l}$ から始まって「連続的に」$\boldsymbol{l}_1$ まで変形していくわけです．
$S^1:=\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^2\mid|\boldsymbol{u}|=1\}$, $D^2:=\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^2\mid|\boldsymbol{u}|\leq 1\}$ とおけば $S^1=\partial D^2$ です．以降，周期 T の閉曲線 $\boldsymbol{l}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ は，

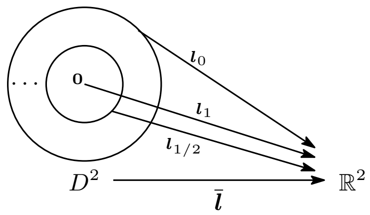
$$\widetilde{\boldsymbol{l}}:S^1\to\mathbb{R}^2,\quad \widetilde{\boldsymbol{l}}(\cos\theta,\sin\theta):=\boldsymbol{l}(\theta T/2\pi)$$

と同一視することにより，$\boldsymbol{l}:S^1\to\mathbb{R}^2$ とみなします（5/16 の問題 9 参照）．
閉曲線 $\boldsymbol{l}:S^1\to\mathbb{R}^2$ が**連続変形で一点に縮む**とは，連続変形 $\boldsymbol{l}_s$ $(0\leq s\leq 1)$ で $\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}_0$ $(\forall\boldsymbol{x}\in S^1)$, つまり $\boldsymbol{l}_1$ が**定値写像**となるものが存在する，ということです．このとき，$\bar{\boldsymbol{l}}:D^2\to\mathbb{R}^2$ を

$$\bar{\boldsymbol{l}}(r\cos\theta,r\sin\theta):=\boldsymbol{l}_{1-r}(\cos\theta,\sin\theta)$$

で定めることができます．$r=0$ においては偏角 θ が定まりませんが，$\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}_0$ $(\forall\boldsymbol{x}\in S^1)$ であることから，$r=0$ においては右辺を $\boldsymbol{u}_0$ で定めることで $\bar{\boldsymbol{l}}$ は $r=0$ においても well-defined となり，連続であることがわかります．また $\boldsymbol{x}\in S^1$ $(r=1)$ に対しては $\bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})$ です．つまり閉曲線 $\boldsymbol{l}:S^1\to\mathbb{R}^2$ が一点に縮むとは，$\boldsymbol{l}$ を $\bar{\boldsymbol{l}}:D^2\to\mathbb{R}^2$ に**拡張**できる（境界では元の $\boldsymbol{l}$ に一致するようにできる）ことを意味します．

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[d, "\cap"'] \arrow[dr, "\boldsymbol{l}"] & \\ D^2 \arrow[r, "\bar{\boldsymbol{l}}"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$



逆に，閉曲線 $\boldsymbol{l}:S^1\to\mathbb{R}^2$ を $\bar{\boldsymbol{l}}:D^2\to\mathbb{R}^2$ に拡張できるとき，$\boldsymbol{l}$ の連続変形 $\boldsymbol{l}_s$ を $\boldsymbol{l}_s(\boldsymbol{x}):=\bar{\boldsymbol{l}}((1-s)\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x}\in S^1)$ で定義すれば，$\boldsymbol{l}_0(\boldsymbol{x})=\bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{x})=\bar{\boldsymbol{l}}(\mathbf{0})$（定値写像）となり，$\boldsymbol{l}$ は連続変形で一点に縮むことがわかります．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html

幾何入門 レポート問題 7（2014 年 5 月 30 日）

担当：境 圭一

領域 $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |\boldsymbol{u}| \leq 2\}$ は単連結ではないことを示せ.

（**6/5（木）17:00 まで**に提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html