幾何入門 演習問題 8（2014 年 6 月 13 日）

担当：境 圭一

1. $S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ の部分集合 $V_\pm$ を

$$V_+ := \{(x,y,z) \in S^2 \mid -1 < z\}, \quad V_- := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z < 1\}$$

で定義する．

(1) $V_+ \cup V_- = S^2$ を示せ．

(2) $\boldsymbol{\varphi}_+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を次のように定義する．$\mathbb{R}^2 = \{(s,t,0) \in \mathbb{R}^3\}$ とみなし，$\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{a} = (s,t,0)$ と $(0,0,-1) \in S^2$ を結ぶ線分が S^2 と交わる点を $\boldsymbol{\varphi}_+(\boldsymbol{a})$ と定める．$\boldsymbol{\varphi}_+(\boldsymbol{a})$ を s,t の式で表し，すべての $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ に対し $\boldsymbol{\varphi}_+(\boldsymbol{a}) \in V_+$ であることを示せ．従って $\boldsymbol{\varphi}_+ : \mathbb{R}^2 \to V_+$ とみなせる．

(3) $\boldsymbol{\varphi}_+ : \mathbb{R}^2 \to V_+$ は全単射であることを示せ．また，Jacobi 行列 $D\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s} & \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \end{pmatrix}$ の階数は常に 2 であることを示せ．これにより，$\boldsymbol{\varphi}_+$ は各 $p \in V_+$ の近くでの S^2 の局所座標になることがわかる．

(4) $\boldsymbol{\varphi}_- : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を次のように定義する．$\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{a} = (s,t,0)$ と $(0,0,1) \in S^2$ を結ぶ線分が S^2 と交わる点を $\boldsymbol{\varphi}_-(\boldsymbol{a})$ と定める．(2), (3) と同様にして，$\boldsymbol{\varphi}_-$ は各 $p \in V_-$ の近くでの S^2 の局所座標になることを示せ．

注． この $\boldsymbol{\varphi}_\pm$ を**立体射影** (stereographic projection) とよぶ．

2. (1) S^2 上の任意の点は $(\cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha\cos\beta, \sin\beta)$ $(0 \leq \alpha \leq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2})$ の形に表せることを示せ．（ヒント：$\mathbb{R}^3$ の極座標）

S^2 の部分集合
$$A := \{(x,0,z) \in S^2 \mid x \geq 0\}, \quad B := \{(x,y,0) \in S^2 \mid x < 0\}$$
を考え，$V := S^2 \setminus A$, $W := S^2 \setminus B$ とおく．

(2) $U := (0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \alpha < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\}$ とおく．$\boldsymbol{\varphi} : U \to V$ を $\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\beta) := (\cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha\cos\beta, \sin\beta)$ で定義すると，$\boldsymbol{\varphi}$ は各 $p \in V$ の近くでの S^2 の局所座標になることを示せ．

(3) $\boldsymbol{\psi} : U \to W$ を $\boldsymbol{\psi}(\alpha,\beta) := (\sin\alpha\cos\beta, \sin\beta, -\cos\alpha\cos\beta)$ で定義すると，$\boldsymbol{\psi}$ は各 $p \in W$ の近くでの S^2 の局所座標になることを示せ．

3. $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^3\}$ とおく．

(1) S を図示せよ．

(2) $\boldsymbol{0} \in S$ の近くで S の局所座標を取れないことを示せ．従って S は曲面ではない．（ヒント：$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{a} \in U$ に対し $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ を示す）

4. $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2+y^2}\}$ とおく．

(1) S を図示せよ．

(2) S は曲面ではないことを示せ．（ヒント：$\boldsymbol{0} \in S$ の近くで局所座標を取れないことを前問と同様に示す）

(3) $S \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ は曲面であることを示せ．

5. $S \subset \mathbb{R}^3$ の各点 $p \in S$ の近くで S の局所座標を取れるとき，S の座標系が存在することを示せ．

6. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ を一次独立なベクトルとするとき，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ であることを示せ．また $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ は $\mathbb{R}^3$ の基底をなすことを示せ．（次回以降使います）

7. $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ に対し $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$（ただし $0 \leq \theta < 2\pi$, $r \geq 0$ とする）とおくとき，(r,θ,z) を**円柱座標**とよぶ．

(1) 円柱座標で一意的に表せない $\mathbb{R}^3$ の点を全て求めよ．

(2) 球面 S^2 を円柱座標で表せ．

(3) 円柱座標で $(r-2)^2 + z^2 = 1$ で表される図形 T を図示せよ．

（提出の必要はありません）

幾何入門 レポート問題 8（2014 年 6 月 13 日）

担当：境 圭一

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とし，そのグラフを $S := \{(s,t,f(s,t)) \in \mathbb{R}^3\}$ とする．$\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to S$ を $\boldsymbol{\varphi}(s,t) := (s,t,f(s,t))$ で定義するとき，$\boldsymbol{\varphi}$ は単射であることを示せ．また $D\boldsymbol{\varphi}$ は常に階数 2 であることを示せ．

（6/20 の 3 限開始時までに提出してください）

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html`