幾何入門 演習問題 9（2014 年 6 月 20 日）

担当：境 圭一

1. 次の三変数 C^∞ 級関数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ に対し，$\mathrm{grad}(f)=\mathbf{0}$ となる点を全て求めよ．$S:=f^{-1}(0)$ とおくとき，$S\neq\emptyset$, かつ S 上で $\mathrm{grad}(f)\neq\mathbf{0}$ となるような（従って，S が曲面を表すような）定数 k の範囲を求めよ．そのときの S を図示せよ．また，それ以外の k に対しては，S はどのような図形になるか？
   (1) $f(x,y,z):=x^2+y^2-k$
   (2) $f(x,y,z):=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-k$（ただし $a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ は k と無関係な定数）
   (3) $f(x,y,z):=(x^2+y^2+z^2+k)^2-16(x^2+y^2)$
   (4) $f(x,y,z):=xy+z^2-k$
   (5) $f(x,y,z):=x^2+2y^2+kz^2+4zx+1$
2. (1) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を C^∞ 級とし，$\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^3$ とする．$\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$, $|\boldsymbol{v}|=1$ に対し，$\boldsymbol{u}$ における f の $\boldsymbol{v}$ 方向の**方向微分**を
$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(\boldsymbol{u}+\epsilon\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{u})}{\epsilon}\quad\cdots\quad(*)$$
   で定義する．講義の補題 10 と同様にして，$(*)$ が $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})$ に等しいことを示せ.
   (2) $(*)$ が最大になるのは，$\boldsymbol{v}$ と $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})$ が同じ方向を向くときであることを示せ.
3. (1) $\boldsymbol{n}:=(a,b,c)\neq\mathbf{0}$ とする．平面 $H:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid ax+by+cz+d=0\}$（ただし $d\in\mathbb{R}$ は定数）は $\boldsymbol{n}$ に直交する平面であることを示せ.
   (2) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を C^∞ 級とする．$\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^3$ を通り，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})(\neq\mathbf{0}$ と仮定する$)$ に直交する平面 H を表す方程式を求めよ．この方程式と，$\boldsymbol{u}$ における f の Taylor 展開（の一次の項）を比較せよ.
4. $f(x,y,z):=x^2+y^2-z^2$ とする．$S:=f^{-1}(0)$ は曲面ではないことを示せ.（ヒント：$\mathbf{0}\in S$ の近くを見る）
5. 円柱座標 (r,θ,z) のもとで $T:=\{(r,\theta,z)\mid(r-2)^2+z^2=1\}$ と表されるトーラスを考える．$S^1:=\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^2\mid|\boldsymbol{u}|=1\}$ 上の点 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ を $[\alpha]$ で表すことにする（従って，S^1 の点としては $[\alpha+2\pi]=[\alpha]$ である)．$F:S^1\times S^1\to T$ を
$$F([\alpha],[\beta]):=(2+\cos\alpha,\ \beta,\ \sin\alpha)$$
   で定義すると F は well-defined な全単射であることを示せ.
6. 円柱座標 (r,θ,z) のもとで $M:=\{(2+t\cos(\theta/2),\theta,t\sin(\theta/2))\mid|t|\leq 1\}$ で表される図形は**メビウスの帯** (Möbius band) であることを確かめよ.
7. 一般の二次形式 $f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2pxy+2qyz+2rzx$（ただし a,b,c,p,q,r は定数で，少なくとも一つは 0 でない）に対し，$S:=f^{-1}(1):=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid f(x,y,z)=1\}$ が $\emptyset$ でない曲面を表すための条件を求めよ.（ヒント：$A:=\begin{pmatrix}a&p&r\\p&b&q\\r&q&c\end{pmatrix}$ とおくと A は対称行列で，$f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ である．A は直交行列で対角化できる．答は A の固有値の言葉で表現できる）
8. $S\subset\mathbb{R}^3$ を曲面とし，$\boldsymbol{\varphi}:U\to S$ を $p\in S$ の近くの局所座標とする.
   (1) $\boldsymbol{\varphi}:U\to\boldsymbol{\varphi}(U)$ とみると，$\boldsymbol{\varphi}$ は全単射であることを示せ.
   (2) $\mathbb{R}^2$ の開集合 $V\subset U$ で $p\in\boldsymbol{\varphi}(V)$ となるものに対し，（必要なら $\epsilon>0$ を小さく取り直せば）$\boldsymbol{\varphi}:V\to S$ も p の近くの局所座標になることを示せ.
   (3) 曲面の定義における局所座標として，いつでも $D^\circ\to S$ の形のものを取れることを示せ．ただし $D^\circ:=\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^2\mid|\boldsymbol{u}|<1\}$ である.（ヒント：開集合 U に含まれる点は全て内点である）
   (4) $\boldsymbol{\psi}:W\to U$ を C^∞ 級の全単射とするとき，$\boldsymbol{\varphi}\circ\boldsymbol{\psi}:W\to S$ も p の近くの局所座標になることを示せ.
   (5) 曲面の定義における局所座標として，いつでも $\mathbb{R}^2\to S$ の形のものを取れることを示せ.（ヒント：C^∞ 級の全単射 $D^\circ\to\mathbb{R}^2$ を構成する）

（提出の必要はありません）

幾何入門 レポート問題 9（2014 年 6 月 20 日）

担当：境 圭一

$f(x,y,z) := x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4y - 12z + k$ とする．$S := f^{-1}(0)$ が曲面になるような定数 k の範囲を求めよ．

（6/27 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html