幾何入門 演習問題 10（2014 年 6 月 27 日）

担当：境 圭一

1. $U_z^+ := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z > 0\}$ 上の点 p の近くの局所座標として，$\boldsymbol{\varphi} : D^\circ \to U_z^+$, $\boldsymbol{\varphi}(s,t) := (s,t,\sqrt{1-s^2-t^2})$ を考える．ただし $D^\circ := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2+t^2 < 1\}$ とする．
   (1) $\partial_s \boldsymbol{\varphi} := \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}$ などと略記する．$\partial_s \boldsymbol{\varphi}$, $\partial_t \boldsymbol{\varphi}$ を計算せよ．
   (2) $p = (a,b,c) \in U_z^+$ とする．$\boldsymbol{\varphi}(s,t) = p$ となる $(s,t) \in D^\circ$ を求めよ．
   (3) (1) を使って T_pS^2 を表す方程式を求めよ．また，T_pS^2 の原点が p に移るよう T_pS^2 を平行移動して得られる平面の方程式を求めよ．
   (4) $\partial_s \boldsymbol{\varphi} \times \partial_t \boldsymbol{\varphi}$ を計算せよ．
   (5) $\boldsymbol{n} : U_z^+ \to \mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}(p) := \dfrac{(\partial_s \boldsymbol{\varphi} \times \partial_t \boldsymbol{\varphi})(s,t)}{|(\partial_s \boldsymbol{\varphi} \times \partial_t \boldsymbol{\varphi})(s,t)|}$ で定義する．ただし $p \in U_z^+$ に対し，$\boldsymbol{\varphi}(s,t) = p$ となる $(s,t) \in D^\circ$ を選んでいる．$\boldsymbol{n}$ は U_z^+ に向きを定めることを示せ．
   (6) $\boldsymbol{\psi} : D^\circ \to U_z^+$ を，$\boldsymbol{\psi}(s,t) := (t,s,\sqrt{1-s^2-t^2})$ で定義し，$\widetilde{\boldsymbol{n}} : U_z^+ \to \mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}$ の定義中の $\boldsymbol{\varphi}$ を $\boldsymbol{\psi}$ で置き換えることにより定義する．$\widetilde{\boldsymbol{n}}$ は $\boldsymbol{n}$ と逆の向きを定める，即ち $\widetilde{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{n}$ が成り立つことを示せ．
2. 次の C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対し，$S := f^{-1}(0)$ が曲面であることを示し，S の概形を図示せよ．$p = (a,b,c) \in S$ に対し，T_pS と $T_p^\perp S$ をそれぞれ求めよ．さらに，T_pS の原点が p に移るように平行移動して得られる平面を表す方程式を求めよ．
   (1) $f(x,y,z) := y^2 + (z-1)^2 - 2$
   (2) $f(x,y,z) := 2x - 3y + 4z - 5$
   (3) $f(x,y,z) := x^2 + y^2 - z^2 + 1$
   (4) $f(x,y,z) := x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} - 1$
   (5) $f(x,y,z) := xy + z^2 + k$（ただし $k \neq 0$ は定数とする）
3. 円柱座標 (r,θ,z) で $\{(r,\theta,z) \mid (r-2)^2+z^2 = 1\}$ で表されるトーラスを S とおく．$\boldsymbol{\varphi} : U := (0,2\pi)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ を，$\mathbb{R}^3$ の xyz 座標で $\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\beta) := ((2+\cos\alpha)\cos\beta,\ (2+\cos\alpha)\sin\beta,\ \sin\alpha)$ で定義する．
   (1) $\boldsymbol{\varphi}(U) \subset S$ であることを示せ．
   (2) $\boldsymbol{\varphi}$ は単射であること，$D\boldsymbol{\varphi}$ は常に階数 2 であることを示せ．
   (3) $p = (a,b,c) \in \varphi(U)$ に対し，T_pS と $T_p^\perp S$ をそれぞれ求めよ．
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級で，$S := f^{-1}(0)$ 上 $\mathrm{grad}(f) \neq \mathbf{0}$ であるとする．このとき S は向き付け可能な曲面であることを示せ．
5. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とし，$f : \Omega \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級曲面とする．f のグラフ $S := \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \Omega\}$ は向き付け可能な曲面であることを示せ．
6. $\boldsymbol{\varphi} : (-1,1) \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{\varphi}(t,\theta) := ((2 + t\cos(\theta/2))\cos\theta,\ (2 + t\cos(\theta/2)\sin\theta,\ t\sin(\theta/2))$ で定義し，その像を $S := \boldsymbol{\varphi}((-1,1) \times [0,2\pi])$ とおく．
   (1) S を図示し，S はメビウスの帯であることを確かめよ．
   (2) $U := (-1,1) \times (0,2\pi)$ に対し，$\boldsymbol{\varphi} : U \to S$ は単射で，$D\boldsymbol{\varphi}$ の階数は常に 2 であることを示せ．
   (3) $p = \boldsymbol{\varphi}(t,\theta)$ $((t,\theta) \in U)$ に対し $\boldsymbol{n}(p) := \dfrac{(\partial_t \boldsymbol{\varphi} \times \partial_\theta \boldsymbol{\varphi})(t,\theta)}{|(\partial_t \boldsymbol{\varphi} \times \partial_\theta \boldsymbol{\varphi})(t,\theta)|}$ とおくと $\boldsymbol{n}(p) \in T_p^\perp S$ である．$\lim\limits_{\theta \downarrow 0} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(0,\theta))$ と $\lim\limits_{\theta \uparrow 2\pi} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(0,\theta))$ を比べよ．このことから S は向き付け可能ではないことを示せ．
7. （難）向き付け可能な曲面 S に対しては，連続写像 $\boldsymbol{n} : S \to \mathbb{R}^3$ で，$\boldsymbol{n}(p) \in T_p^\perp S$, $|\boldsymbol{n}(p)| = 1$ $(\forall p \in S)$ をみたすものが定まった．では，連続写像 $\boldsymbol{u} : S \to \mathbb{R}^3$ で，$\boldsymbol{u}(p) \in T_pS$, $|\boldsymbol{u}(p)| = 1$ $(\forall p \in S)$ をみたすものは定まるか？ S がトーラスの場合，このような $\boldsymbol{u}$ を一つ見つけよ．S が 2 次元球面 S^2 の場合はどうか？

（提出の必要はありません）

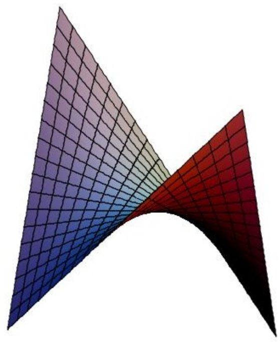

図 1　$z = xy$ のグラフ

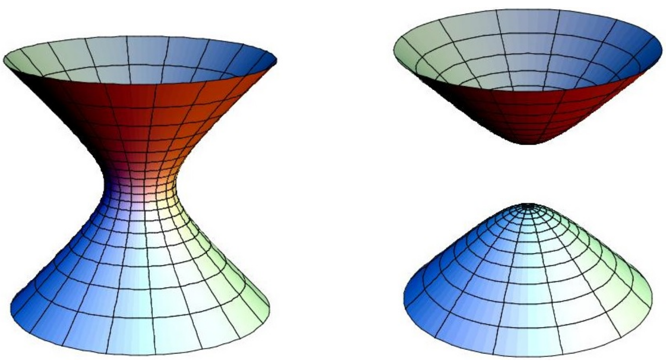

図 2　一葉双曲面，二葉双曲面

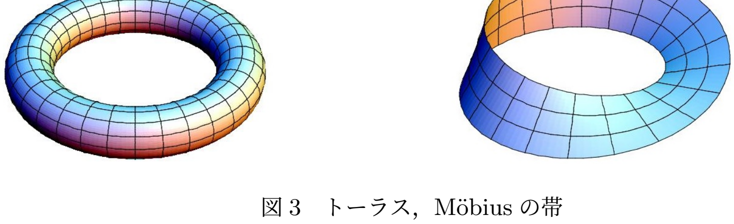

図 3　トーラス，Möbius の帯

幾何入門 レポート問題 10（2014 年 6 月 27 日）

担当：境 圭一

$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2z^2 = 1\}$ 上の点 $p = (a,b,c)$ における接平面 T_pS が $\boldsymbol{u} := (1,2,-2)$ と直交するとき，a,b,c を求めよ．

（7/4 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html