幾何入門 演習問題 11（2014 年 7 月 4 日）

担当：境 圭一

1. $S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ の向きが，$\boldsymbol{n} : S^2 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{n}(p) = p$ で与えられているとする．$U_z^+ := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$ 上の点 p の近くの局所座標として，$\boldsymbol{\varphi} : D^\circ \to U_z^+$, $\boldsymbol{\varphi}(s, t) := (s, t, \sqrt{1 - s^2 - t^2})$ を考える．ただし $D^\circ := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 < 1\}$ とする．
   (1) $\partial_s \boldsymbol{\varphi} := \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}$ などと略記する．$\boldsymbol{v} := \partial_s \boldsymbol{\varphi} \times \partial_t \boldsymbol{\varphi}$ を計算し，$\boldsymbol{\varphi}$ は向きを保つ局所座標であることを示せ．つまり，任意の $\boldsymbol{a} \in D^\circ$ に対し $p = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})$ とおくと，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{a}) = k\boldsymbol{n}(p)$ となる $k > 0$ が存在することを示せ．
   (2) $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z) := (x, y, z)$ に対し，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s, t))$ を求めよ．
   (3) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s, t)) \cdot \boldsymbol{v}(s, t)$ を求めよ．
   (4) $\boldsymbol{\varphi}(D^\circ) = U_z^+$ であることを示せ．
   (5) $\displaystyle\int_{U_z^+} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} := \int_{D^\circ} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s, t)) \cdot \boldsymbol{v}(s, t) dsdt$ を計算せよ．
   (6) $\boldsymbol{\varphi}' : D^\circ \to U_z^+$ を，$\boldsymbol{\varphi}'(s, t) := (t, s, \sqrt{1 - s^2 - t^2})$ で定義する．$\boldsymbol{\varphi}'$ は向きを保つ局所座標ではないことを示せ．
   (7) $\boldsymbol{v}' := \partial_s \boldsymbol{\varphi}' \times \partial_t \boldsymbol{\varphi}'$ とおく．$\displaystyle\int_{D^\circ} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\psi}(s, t)) \cdot \boldsymbol{v}'(s, t) dsdt$ を計算し (4) と比較せよ（問題 5 も参照）．

2. S^2 の向き $\boldsymbol{n} : S^2 \to \mathbb{R}^3$ は問題 1 と同じとする．$V_+ := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > -1\}$ とおき，各 $p \in V_+$ の近くの局所座標 $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to V_+$ として $\boldsymbol{\varphi}(s, t) := \dfrac{(2s,\, 2t,\, 1 - s^2 - t^2)}{1 + s^2 + t^2}$ を考える（演習 8 (6/13) の立体射影）．
   (1) $\boldsymbol{\varphi}$ は向きを保つ局所座標であることを示せ．
   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z) := (x, y, z)$ に対し，$\displaystyle\int_{V_+} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
   (3) $\boldsymbol{\varphi}(D^\circ) = U_z^+$ であることを示せ．この $\boldsymbol{\varphi}$ を使って $\displaystyle\int_{U_z^+} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算し，問題 1 の結果と比較せよ．

3. C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を**スカラー場**とも呼ぶ．向きづけられた曲面 S に対し，$p \in S$ の近くの向きを保つ局所座標 $\boldsymbol{\varphi} : U \to S$ を取って，f の $A := \boldsymbol{\varphi}(U)$ に沿った**面積分**を次のように定義する：
$$\int_A f\, dS := \int_U f(\boldsymbol{\varphi}(s, t))\, |(\partial_s \boldsymbol{\varphi})(s, t) \times (\partial_t \boldsymbol{\varphi})(s, t)|\, dsdt.$$
   (1) $\displaystyle\int_A f\, dS$ は向きを保つ局所座標 $\boldsymbol{\varphi}$ の取り方によらないことを示せ．
   (2) 定数関数 1 に対し，$\displaystyle\int_A 1\, dS$ を A の**面積**と呼ぶ．問題 2 の $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to V_+$ に対し，$\displaystyle\int_{V_+} 1\, dS$ を計算せよ．

4. S^2 の局所座標として， 演習 8 (6/13) 問題 2 の局所座標 $\boldsymbol{\varphi} : U \to V$ を取る．問題 1 の $\boldsymbol{V}$ に対し $\displaystyle\int_V \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．また V の面積（問題 3 参照）を求めよ．

5. $(S, \boldsymbol{n})$ を向き付けられた曲面とする．$p \in S$ の近くの局所座標 $\boldsymbol{\varphi} : U \to S$ と $\boldsymbol{\varphi}' : U' \to S$ で，$\boldsymbol{\varphi}$ は向きを保ち，$\boldsymbol{\varphi}'$ は向きを保たず，$\boldsymbol{\varphi}(U) = \boldsymbol{\varphi}'(U') \subset S$ をみたすものをとる．このとき $\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し次を示せ：
$$\int_U \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s, t)) \cdot \Big((\partial_s \boldsymbol{\varphi})(s, t) \times (\partial_t \boldsymbol{\varphi})(s, t)\Big) dsdt = -\int_{U'} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}'(s, t)) \cdot \Big((\partial_s \boldsymbol{\varphi}')(s, t) \times (\partial_t \boldsymbol{\varphi}')(s, t)\Big) dsdt$$

6. トーラス S の局所座標として，演習 10 (6/27) 問題 3 の $\boldsymbol{\varphi} : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ を取る．
   (1) S の向き $\boldsymbol{n} : S \to \mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}$ が S で囲まれる有界領域から非有界領域に向かうよう定義する．$\boldsymbol{\varphi}$ は向きに適合した局所座標か？（ヒント：例えば $\boldsymbol{\varphi}(\pi, \pi)$ における $\boldsymbol{n}$ の向きを見れば十分）
   (2) $\boldsymbol{V}(x, y, z) := (y, -x, z)$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{\varphi}(U)} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
   (3) $\boldsymbol{\varphi}(U)$ の面積（問題 3 参照）を計算せよ．

7. 一般に，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ と $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ に対し，$(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) \times (c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}) = (ad - bc)\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ であることを示せ．これを使って補題 75 の証明を完成させよ．

（提出の必要はありません）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html

補足：レポート 10 について．

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とします．講義の定理 53 が主張していたのは次のことです：

$$S:=f^{-1}(0)\text{ 上 }\operatorname{grad}(f)\neq\mathbf{0}\implies S\text{ は曲面．}$$

逆については何も述べていないことに注意してください．つまり，S 上に $\operatorname{grad}(f)(p)=\mathbf{0}$ となる $p\in S$ があったとしても，そのことから直ちに「S は曲面でない」と結論付けて良いとは言っていないわけです．定理 53 の逆が成り立たない例として，例えば $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2-1)^2$ があります．$f^{-1}(0)=S^2$ は曲面ですが

$$\operatorname{grad}(f)(x,\,y,\,z)=4(x^2+y^2+z^2-1)(x,\,y,\,z)$$

なので，S^2 上の全ての点で $\operatorname{grad}(f)=\mathbf{0}$ です．

レポート 10 の場合，$k\neq-14$ ならば S 上 $\operatorname{grad}(f)\neq\mathbf{0}$ であることがわかるので S は曲面だと言えます．一方，$k=-14$ のときについては定理 53 は何も教えてくれないので，別途考える必要があります．絵を描いたりして，$(0,-1,-2)\in S$ の近くで局所座標が取れないことを説明しようとしている（と思われる）ものには○がついていると思います．

$k=-14$ のとき曲面にならないことの（ある程度）正確な証明を一つ述べておきます．簡単のため問題を変えて，$S=\{(x,y,z)\mid x^2-y^2-z^2=0\}$（下図参照）が曲面でないことを示します．この S は，平行移動や拡大・縮小によりレポート 10 の S $(k=-14)$ に一致するので，本質的には問題は変わっていません．$f(x,y,z):=x^2-y^2-z^2$ とおくと $f^{-1}(0)=S$ で，$\mathbf{0}\in S$ において $\operatorname{grad}(f)(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ になっています．

$\mathbf{0}\in S$ の近くの局所座標 $\boldsymbol{\varphi}:U\to S$ が取れたとしましょう．$\pm\varphi_1(\boldsymbol{a})>0$ となるような $\boldsymbol{a}\in U$ においては $\varphi_1=\pm\sqrt{\varphi_2^2+\varphi_3^2}$（複合同順）であることから，$\boldsymbol{a}$ における Jacobi 行列は

$$D\boldsymbol{\varphi}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\varphi_2(\boldsymbol{a})\cdot\partial_s\varphi_2(\boldsymbol{a})+\varphi_3(\boldsymbol{a})\cdot\partial_s\varphi_3(\boldsymbol{a})}{\varphi_1(\boldsymbol{a})} & -\dfrac{\varphi_2(\boldsymbol{a})\cdot\partial_t\varphi_2(\boldsymbol{a})+\varphi_3(\boldsymbol{a})\cdot\partial_t\varphi_3(\boldsymbol{a})}{\varphi_1(\boldsymbol{a})}\\ \partial_s\varphi_2(\boldsymbol{a}) & \partial_t\varphi_2(\boldsymbol{a})\\ \partial_s\varphi_3(\boldsymbol{a}) & \partial_t\varphi_3(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}$$

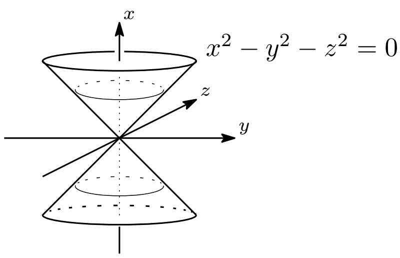
です．$D\boldsymbol{\varphi}$ は $\varphi_1(\boldsymbol{a}_0)=0$ となる $\boldsymbol{a}_0$ においても連続的に定義されなければなりませんが，例えば

- $\{(t,t,0)\in S\}$ に沿って $\mathbf{0}$ に近づくと，$D\boldsymbol{\varphi}$ の $(1,1)$ 成分は $\partial_s\varphi_2(\boldsymbol{a}_0)$ に，
- $\{(t,0,t)\in S\}$ に沿って $\mathbf{0}$ に近づくと，$D\boldsymbol{\varphi}$ の $(1,1)$ 成分は $-\partial_s\varphi_3(\boldsymbol{a}_0)$ に，
- $\{(t,0,-t)\in S\}$ に沿って $\mathbf{0}$ に近づくと，$D\boldsymbol{\varphi}$ の $(1,1)$ 成分は $\partial_s\varphi_3(\boldsymbol{a}_0)$ に，

それぞれ近づきます．これらの極限値は全て等しいことから，$\partial_s\varphi_2(\boldsymbol{a}_0)=\partial_s\varphi_3(\boldsymbol{a}_0)=0$ です．同様に $(1,2)$ 成分を見ることで，$\partial_t\varphi_2(\boldsymbol{a}_0)=\partial_t\varphi_3(\boldsymbol{a}_0)=0$ です．

これらのことを知った上で，改めて $\{(t,t,0)\in S\}$ に沿って $\mathbf{0}$ に近づくと，$D\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}_0)=O$ であることがわかります．これは $\boldsymbol{\varphi}$ が局所座標であることの定義に反します．

このように，$\operatorname{grad}(f)(p)=\mathbf{0}$ となる $p\in f^{-1}(0)$ がある場合は，$f^{-1}(0)$ は曲面になったりならなかったりします．f の形に応じた議論をする必要があり，一筋縄ではいきません．



幾何入門 レポート問題 11（2014 年 7 月 4 日）

担当：境 圭一

7/4 の問題 1 の状況で，$\boldsymbol{W}(x,y,z) := (y,-x,z)$ に対し，$\displaystyle\int_{U_z^+} \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ.

（7/11 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html