幾何入門 演習問題 12（2014 年 7 月 11 日）

担当：境 圭一

1. C^∞ 級関数 $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対し，次の等式を示せ．
   (1) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \Delta f$
   (2) $\mathrm{div}(g \cdot \mathrm{grad}(f)) = \mathrm{grad}(f) \cdot \mathrm{grad}(g) + g\Delta f$
2. $S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ とし，向きは $\boldsymbol{n} : S^2 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{n}(p) := p$ で定まるものとする．$\boldsymbol{V}(x,y,z) := \left(x^2+3xy^2,\, -y^3+y(2-z),\, \dfrac{z^2}{2} - 2zx\right)$ に対し，Gauss の発散定理を用いて $\displaystyle\int_{S^2} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
3. $r = 1, 2$ に対し，$S^2(r) := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = r\}$ とおく．$S^2(1) = S^2$ は今までの 2 次元球面である．
   (1) $S^2(r)$ は曲面であることを示せ．（定理 53 を用いよ）
   (2) $S^2(1), S^2(2)$ で囲まれる有界領域を Ω とし，$S^2(r)$ $(r = 1, 2)$ には Ω から外側に向かう法ベクトルで向きを入れる．そのような連続写像 $\boldsymbol{n}_r : S^2(r) \to \mathbb{R}^3$ $(r = 1, 2)$ を求めよ．
   (3) ベクトル場 $\boldsymbol{V} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ は $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$ をみたすとする．このとき $\displaystyle\int_{S^2(1)} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = -\int_{S^2(2)} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を示せ．ただし $S^2(r)$ の向きは (2) のものである．
4. （教科書の例題 2.29 参照）$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x/2)^2 + (y/3)^2 + (z/4)^2 = 1\}$ とする．S の向きは，S が囲む有界領域の内側から外側に向かう法ベクトルで与えられるとする．
   (1) S は曲面であることを示せ．
   (2) S の向きを表す $\boldsymbol{n} : S \to \mathbb{R}^3$ を求めよ．（ヒント：補題 59 を使う．符号を決めるには，例えば $\boldsymbol{n}(2,0,0) = (1,0,0)$ であるべきことに注意するとよい）
   (3) $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とおき，$\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) := \dfrac{(x,y,z)}{r^3}$ を考える．$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (4) $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ とする．S と S^2 で囲まれた有界領域 Ω に対し Gauss の発散定理を使って，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を S^2 上の面積分を使って表わせ．
   (5) S^2 上 $r = 1$ であることを使って，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
5. $S \subset \mathbb{R}^3$ は閉曲面で，S が囲む有界領域 Ω は原点を内部に含むとする．S の向きは，Ω の内側から外側に向かう法ベクトルで与えられるとする．このとき，問題 4 のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
6. 講義の例 81 の計算を正当化しよう．
   (1) $U_\epsilon := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 1-\epsilon < |\boldsymbol{u}| < 1+\epsilon\}$ とおき，$\boldsymbol{\varphi}_\epsilon : U_\epsilon \to \mathbb{R}^3$ を次のように定める；$(r\cos\theta, r\sin\theta) \in U_\epsilon$ に対し
   $$\boldsymbol{\varphi}_\epsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) := (\cos(1-r)\cos\theta,\, \cos(1-r)\sin\theta,\, \sin(1-r))$$
   とおく．$\boldsymbol{\varphi}_\epsilon$ は向きに適合した S^2 の局所座標で，$\boldsymbol{\varphi}_\epsilon(U_\epsilon)$ は「赤道」$\{(x,y,0) \in S^2\}$ を覆うことを示せ．
   (2) $\displaystyle\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\boldsymbol{\varphi}_\epsilon(U_\epsilon)} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} \to 0$ を示せ．
7. $S_1, \ldots, S_k \subset \mathbb{R}^3$ は互いに交わらない閉曲面とし，これらで囲まれる有界領域を Ω とする．各 S_i の向きは，Ω の内側から外側に向かう法ベクトルで与えられるとする．
   (1) 問題 1. (2) と Gauss の発散定理を使って，C^∞ 級関数 $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ に対し
   $$\sum_{i=1}^k \int_{S_i} (g \cdot \mathrm{grad}(f)) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_\Omega (\mathrm{grad}(f) \cdot \mathrm{grad}(g) + g\Delta f)\,dxdydz$$
   を示せ．（これも Green の公式と呼ぶ）
   (2) $f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ は Ω 上で $\Delta f_1 = \Delta f_2$ をみたし，さらに各 S_i 上で $f_1 = f_2$ であるとする．このとき Ω 上で $f_1 = f_2$ であることを示せ．（ヒント：(1) で $f = g = f_1 - f_2$ の場合を考えよ）

（提出の必要はありません）

幾何入門 レポート問題 12（2014 年 7 月 11 日）

担当：境 圭一

$S \subset \mathbb{R}^3$ を閉曲面とし，S で囲まれる有界領域を Ω とする．S の向きは Ω の内側から外側に向かう法ベクトルで与えられるとする．$\boldsymbol{V}(x,y,z) := (y^2+yz+z^2,\, z^2+zx+x^2,\, x^2+xy+y^2)$ に対し，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．（ヒント：$f(x,y,z) := xy+yz+zx$, $g(x,y,z) := x+y+z$ に対し Green の公式を使う）

（7/18 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html