幾何入門 演習問題 13（2014 年 7 月 18 日）

担当：境 圭一

1. (1) C^∞ 級関数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ に対し，$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f))=\mathbf{0}$ を示せ．
   (2) $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{V})=0$ を示せ．
2. 次のベクトル場 $\boldsymbol{V}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ について，$\boldsymbol{V}=\mathrm{grad}(f)$ となる関数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ が存在するものはどれか．
   (1) $\boldsymbol{V}(x,y,z)=(y+z,\,z+x,\,x+y)$
   (2) $\boldsymbol{V}(x,y,z)=(y^2+z^2,\,z^2+x^2,\,x^2+y^2)$
   (3) $\boldsymbol{V}(x,y,z)=(F(x),G(y),H(z))$, ただし $F,G,H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は一変数関数
3. $S:=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2\le 1\}$ とおく．
   (1) S は境界つき曲面であることを示せ．∂S を求めよ．（例 88 を参照せよ）
   (2) S の向き $\boldsymbol{n}:S\to\mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}(p):=(0,0,1)$ $(\forall p\in S)$ で定める．$\boldsymbol{n}$ が誘導する ∂S の向きを求めよ．
   (3) (2) の向きについて，$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z):=(-y+z,z+x,z)$ に対し，$\displaystyle\int_{\partial S}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (4) (3) の $\boldsymbol{V}$ に対し $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を求め，$\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算し (3) と比較せよ．（ヒント：局所座標としては，例えば $D:=\{(s,t)\in\mathbb{R}^2\mid s^2+t^2\le 1\}$ とおき，$\boldsymbol{\varphi}:D\to S$, $\boldsymbol{\varphi}(s,t):=(s,t,0)$ を用いるとよい）
4. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を $f(x,y,z):=z+x^2+y^2-1$ で定義し，$S:=f^{-1}(0)\cap\{z\ge 0\}$ とおく．
   (1) S は境界つき曲面であることを示せ．
   (2) S の向き $\boldsymbol{n}\to\mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{n}(p):=\dfrac{\mathrm{grad}(f)(p)}{|\mathrm{grad}(f)(p)|}$ で定義する．$\boldsymbol{n}$ が $\partial S=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2=1\}$ に誘導する向きを求めよ．
   (3) 前問 (3) の $\boldsymbol{V}$ に対し，$\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
5. 閉曲面 S と $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}=0$ を示せ．（ヒント：S は境界を持たない）
6. 向き付けられた境界つき曲面 $(S,\boldsymbol{n})$, $(S',\boldsymbol{n}')$ は $\partial S=\partial S'$ をみたし，さらに $p\in\partial S=\partial S'$ のとき $\boldsymbol{n}(p)=\boldsymbol{n}'(p)$ をみたすとする．このとき $\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}=\pm\int_{S'}\mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ であることを示せ．符号はどのように定まるか？
7. $S\subset\mathbb{R}^3$ を曲面とし（境界はあってもなくてもよい），$\boldsymbol{\varphi}:U\to S$ を局所座標とする．$\boldsymbol{\varphi}(U)$ 上の曲線 $\boldsymbol{l}:(-\epsilon,\epsilon)\to\boldsymbol{\varphi}(U)$ が与えられたとき，$\boldsymbol{\varphi}:U\to\boldsymbol{\varphi}(U)$ が全単射であることから，U 上の曲線 $\boldsymbol{m}:(-\epsilon,\epsilon)\to U$ で $\boldsymbol{l}(t)=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{m}(t))$ をみたすものが存在する．
   (1) $\boldsymbol{m}(t)=\begin{pmatrix}m_1(t)\\ m_2(t)\end{pmatrix}$ と書く．$\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)$ を $m_1'(t)$, $m_2'(t)$ と $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial s}(\boldsymbol{m}(t))$, $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\boldsymbol{m}(t))$ を用いて表わせ．
   (2) $p=\boldsymbol{l}(0)$ とおく．$\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(0)\in T_pS$ であることを示せ．
8. Stokes の定理における「コンパクト」（$\mathbb{R}^3$ の有界閉集合であること）という条件は必要である．ここでは有界性が必要であることを確かめよう．$S:=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3\mid y\ge 0\}$ とする．
   (1) S は $\mathbb{R}^3$ の閉集合だが，有界でないことを示せ．
   (2) $\mathbb{H}^2:=\{(s,t)\in\mathbb{R}^2\mid t\ge 0\}$ を**上半平面**とよぶ．$\boldsymbol{\varphi}:\mathbb{H}^2\to\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\varphi}(s,t):=(s,t,0)$ は，各 $p\in S$ の近くの局所座標であることを示せ．また $\partial S=\{(x,0,0)\in S\}$ であることを示せ．
   (3) S の向きを，$\boldsymbol{n}(p):=(0,0,1)$ $(\forall p\in S)$ となる法ベクトルで定める．このとき，(2) の座標は向きを保つことを示せ．また，$\boldsymbol{l}:\mathbb{R}\to S$, $\boldsymbol{l}(t):=(t,0,0)$ は $\boldsymbol{n}$ から誘導される ∂S の向きを表すことを示せ．
   (4) $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z):=(e^{-x^2},\,x,\,0)$ に対し，$\displaystyle\int_{\partial S}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．“$\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$” は有限か？
9. 形式的に $\nabla:=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ とおくとき，次の形式的な「等式」を示せ．
   (1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\mathrm{div}\boldsymbol{V}$
   (2) C^∞ 級関数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ に対し，$(\nabla\cdot\nabla)f=\Delta f:=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

（提出の必要はありません）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html

幾何入門 レポート問題 13（2014 年 7 月 18 日）

担当：境 圭一

$S := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$（例 88 の曲面）とし，$S$ の向きは $\boldsymbol{n}(p) = p$ $(\forall p \in S)$ で与えられるとする．$\boldsymbol{V}(x,y,z) := (y\cos z,\ -x\cos z,\ \sin z)$ に対し，$\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．（ヒント：Stokes の定理）

（7/25 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html