幾何入門 演習問題 14（2014 年 7 月 25 日）

担当：境 圭一

1. $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$（ともに縦ベクトル）と n 行 m 列の行列 A に対し，$(A\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot ({}^tA\boldsymbol{v})$ を示せ．ただし ${}^tA$ は A を転置して得られる m 行 n 列の行列である．

※以下，今までの復習と補足です

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とし，$S := f^{-1}(0)$ とする．S 上 $\mathrm{grad}(f) \neq \boldsymbol{0}$ のとき，S は向きづけ可能な曲面であることを示せ．また，S の向き $\boldsymbol{n} : S \to \mathbb{R}^3$ を一つ求めよ．
3. $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y/2)^2 + (z/3)^2 = 1\}$ とおく．
   (1) S は向きづけ可能な曲面であることを示し，S の概形を図示せよ．
   (2) 各 $p \in S$ に対し，T_pS ならびに $T_p^\perp S$ を表す方程式を求めよ．また T_pS を平行移動して，実際に p において S に接する平面の方程式を求めよ．
   (3) S の向き $\boldsymbol{n} : S \to \mathbb{R}^3$ で，$\boldsymbol{n}(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ をみたすものを求めよ．
   (4) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z) := (x^3 + xyz - xy^2,\, y - y^2z + y^3,\, (yz^2/2) - 3zx^2 - y^2z)$ に対し，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．ただし S の向きは (3) のものとする．
   (5) ベクトル場 $\boldsymbol{W} := \dfrac{(x, y-1, z)}{(x^2 + (y-1)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ に対し，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．ただし S の向きは (3) のものとする．
4. $f(x, y, z) := x^2 + (y-1)^2 - (z+2)^2 - 3$ とおく．
   (1) $S := f^{-1}(0)$ は曲面であることを示し，S の概形を図示せよ．
   (2) $p = (a, b, c) \in S$ とする．T_pS ならびに $T_p^\perp S$ を表す方程式を求めよ．
   (3) $S' := S \cap \{-3 \le z \le -1\}$ とおく．S' は境界つき曲面であることを示せ．
   (4) S は向きづけ可能であることを示せ．S の向きを適当に選んで，ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z) := (1 - y, x, z)$ に対し，$\displaystyle\int_{S'} \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．また $\boldsymbol{W}(x, y, z) := ((1-y)(z+2), x\sin\bigl(\frac{\pi z}{2}\bigr), z^2)$ に対し，$\displaystyle\int_{S'} \mathrm{rot}\boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
5. $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$ とおき，Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z) := \dfrac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$ を考える．
   (1) $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (2) $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{l}(t) := (\cos t, \sin t, 0)$ でパラメータづけされる閉曲線に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (3) Ω は単連結ではないことを示せ．
6. $(S, \boldsymbol{n})$ を向きづけられた境界つき曲面とし，$p \in \partial S$ の近くの局所座標 $\boldsymbol{\varphi} : W \to \mathbb{R}^3$ を取る．ただし $W \subset \mathbb{R}^2$ は開集合で，$W \cap \mathbb{H}^2 = U$ とおくとき $p \in \boldsymbol{\varphi}(U) \subset S$ である．$\boldsymbol{\varphi}$ が向きを保つとき，p を通る曲線 $\boldsymbol{l} : (-\epsilon, \epsilon) \to S$, $\boldsymbol{l}(s) := \boldsymbol{\varphi}(s - s_0, 0)$ は ∂S の向きを表すことを示せ．ただし $p = \boldsymbol{\varphi}(s_0, 0)$.
7. 問題 3 の曲面 S に対し，$S_\pm := \{(x, y, z) \in S \mid \pm z > 0\}$（複合同順）とおく．
   (1) $U := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + (t/2)^2 < 1\}$ とおき，$\boldsymbol{\varphi}_+ : U \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{\varphi}(s, t) := \Bigl(s, t, 3\sqrt{1 - s^2 - (t/2)^2}\Bigr)$ で定める．S_+ の任意の点 $p \in S_+$ に対し，$\boldsymbol{\varphi}_+$ は p の近くの局所座標で，向きを保つことを示せ．ただし S_+ の向きは問題 3. (3) のもの（の S_+ への制限）とする．
   (2) S_- の任意の点 $p \in S_-$ に対し，p の近くの局所座標 $\boldsymbol{\varphi}_- : U \to S_-$ で，向きを保つものを一つ求めよ．
   (3) $q_- := (0, 0, -3) \in S$ とする．$(s, t) \in U$ に対し，q_- と $(s, t, 0) \in \mathbb{R}^3$ を結ぶ直線を考え，この直線と S_+ の交点を $\boldsymbol{\varphi}'_+(s, t)$ とおく．$\boldsymbol{\varphi}'_+ : U \to \mathbb{R}^3$ も任意の $p \in S_+$ の近くの局所座標で，向きを保つことを示せ．
   (4) S_+ の二つの局所座標 $\boldsymbol{\varphi}_+$, $\boldsymbol{\varphi}'_+$ の間の座標変換 $\boldsymbol{\psi} : U \to U$ を求めよ．各 $\boldsymbol{a} \in U$ に対し，$\det D\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{a})$ の正負を調べよ．

（提出の必要はありません）

幾何入門 レポート問題 14（2014 年 7 月 25 日）

担当：境 圭一

$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ は単連結でないことを示せ.

（**7/31（木）17:00 までに**提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html