幾何入門 中間試験（2014 年 6 月 6 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とし，関数やベクトル場は全て C^∞ 級のものとする．ベクトルは縦横のどちらで書いても差し支えない．$\mathbb{R}^2$ 上の向きのついた曲線 $\boldsymbol{l}$ に対し，$\boldsymbol{l}(t)$ における単位法ベクトルを $\boldsymbol{n}(t)$ で表すものとする．

1. (1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算せよ．また，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が張る平行六面体の体積を求めよ．
   (2) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(\boldsymbol{u}) := x^2 + 2xy - y^3$ に対し，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ を全て求めよ．
   (3) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x^2 + 2y - 3xy \\ -x^2 + 2y^2 \end{pmatrix}$ に対し，$(\mathrm{div}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) = (\mathrm{rot}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) = 0$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ を全て求めよ．
   (4) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ とベクトル場 $\boldsymbol{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対し，$\mathrm{div}(f\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}(f) \cdot \boldsymbol{V} + f\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ を示せ．
   (5) $\mathbb{R}^2$ 上の二つの関数 $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対し，$\mathrm{grad}(gh) = h\,\mathrm{grad}(g) + g\,\mathrm{grad}(h)$ を示せ．
2. $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - 2y \end{pmatrix}, \boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}$ を考える．
   (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V}$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$, $\mathrm{div}\boldsymbol{W}$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{W}$ を求めよ．
   (2) 関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ で $\mathrm{grad}(f) = \boldsymbol{V}$ をみたすものは存在するか？存在するならば f を一つ求め，存在しないならばそのことを証明せよ．
   (3) 二つの曲線 $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{m}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$, $\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{m}$ を計算せよ．
   (4) (3) の曲線 $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{l}$, $\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{m}$ を計算せよ．
   (5) 関数 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ で $\mathrm{grad}(g) = \boldsymbol{W}$ をみたすものは存在するか？存在するならば g を一つ求め，存在しないならばそのことを証明せよ．
3. 直線 $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x = -1$ で囲まれる有界領域を Ω とし，$L := \partial\Omega$ とおく．
   (1) L は区分的に滑らかな閉曲線であることを示せ．
   (2) $L = \partial\Omega$ の向きを表すパラメータ $\boldsymbol{l}$ を取る．$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (3) $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x^4 + 4xy^3 + xy \\ -3x^3y - 2y^4 - y^2 \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n}\, dl$ を計算せよ．
4. $L \subset \mathbb{R}^2$ は滑らかな閉曲線で，L が囲む有界領域 Ω は $\boldsymbol{u}_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を内部に含むとする．L を表す正則パラメータ $\boldsymbol{l}$ で，$\partial\Omega$ の向きを表すものを取る．
   (1) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{(x-1)^2 + y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x - 1 \end{pmatrix}$ とする．$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, dl$ を求めよ．
   (2) (1) の $\boldsymbol{V}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を求めよ．
   (3) $\Omega \setminus \{\boldsymbol{u}_0\}$ は単連結でないことを示せ．

配点：15, 15, 10, 10 (**1**: $3 \times 5 = 15$, **2**: $3 \times 5 = 15$, **3**: $3 + 3 + 4 = 10$, **4**: $3 + 3 + 4 = 10$)