幾何入門 中間試験（2014 年 6 月 6 日）解答例

担当：境 圭一

1. (1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix}$. 平行六面体の体積は，$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=7$.

(2) $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})=\begin{pmatrix}2x+2y\\2x-3y^2\end{pmatrix}$. これが $\boldsymbol{0}$ とすると $x+y=2x-3y^2=0$, 従って $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\end{pmatrix}$.

(3) $(\mathrm{div}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u})=2x+y$, $(\mathrm{rot}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u})=x-2$. これらが 0 とすると，$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$.

(4) $\partial_x f:=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ などと略記する．$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}V_1\\V_2\end{pmatrix}$ とおくと，

$$\mathrm{div}(f\boldsymbol{V})=\partial_x(fV_1)+\partial_y(fV_2)=(\partial_x f)V_1+(\partial_y f)V_2+f\cdot\big((\partial_x V_1)+(\partial_y V_2)\big)=\mathrm{grad}(f)\cdot\boldsymbol{V}+f\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}.$$

(5) (4) と同じ略記のもとで

$$\mathrm{grad}(gh)=\begin{pmatrix}\partial_x(gh)\\\partial_y(gh)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\partial_x g)\cdot h+g\cdot(\partial_x h)\\(\partial_y g)\cdot h+g\cdot(\partial_y h)\end{pmatrix}=h\,\mathrm{grad}(g)+g\,\mathrm{grad}(h).$$

2. (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V}=0$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=0$, $\mathrm{div}\boldsymbol{W}=4$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{W}=2$.

(2) $f(\boldsymbol{u}):=x^2+xy-y^2$ とおくと $\boldsymbol{V}=\mathrm{grad}(f)$.

(3) (2) より，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}=f(\boldsymbol{l}(\pi/2))-f(\boldsymbol{l}(0))=f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=-2$, $\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m}=f(\boldsymbol{m}(\pi/2))-f(\boldsymbol{m}(0))=$ $f\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=-2$.

(4) $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{l}(t))\cdot\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)=\begin{pmatrix}2\cos t-\sin t\\\cos t+2\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t\end{pmatrix}=1$, $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{m}(t))\cdot\dfrac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)=\begin{pmatrix}2\cos t+\sin t\\\cos t-2\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\-\cos t\end{pmatrix}=-1$ だから，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_0^{\pi/2}dt=\frac{\pi}{2}$, $\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{m}=-\int_0^{\pi/2}dt=-\frac{\pi}{2}$.

(5) $\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}$ と同じ定義式で定義域が $[0,\pi]$ である曲線をそれぞれ $\widetilde{\boldsymbol{l}},\widetilde{\boldsymbol{m}}$ とする．$\widetilde{\boldsymbol{l}}(0)=\widetilde{\boldsymbol{m}}(0)$, $\widetilde{\boldsymbol{l}}(\pi)=\widetilde{\boldsymbol{m}}(\pi)$ だが，$\displaystyle\int_{\widetilde{\boldsymbol{l}}}\boldsymbol{W}\cdot d\widetilde{\boldsymbol{l}}=\int_0^{\pi}dt=\pi$, $\displaystyle\int_{\widetilde{\boldsymbol{m}}}\boldsymbol{W}\cdot d\widetilde{\boldsymbol{m}}=-\int_0^{\pi}dt=-\pi$ より $\displaystyle\int_{\widetilde{\boldsymbol{l}}}\boldsymbol{W}\cdot d\widetilde{\boldsymbol{l}}\neq\int_{\widetilde{\boldsymbol{m}}}\boldsymbol{W}\cdot d\widetilde{\boldsymbol{m}}$ なので，$\mathrm{grad}(g)=\boldsymbol{W}$ となる関数 $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は存在しない．

【別解】$\mathrm{rot}\boldsymbol{W}\neq 0$ だから，$\cdots$

3. (1) $\boldsymbol{l}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ を

$$\boldsymbol{l}(t)=\begin{pmatrix}t-1\\t-2\end{pmatrix}\quad(0\le t\le 2),\qquad \boldsymbol{l}(t)=\begin{pmatrix}-t+3\\t-2\end{pmatrix}\quad(2\le t\le 4),\qquad \boldsymbol{l}(t)=\begin{pmatrix}-1\\-t+6\end{pmatrix}\quad(4\le t\le 8)$$

で，かつ $\boldsymbol{l}(t+8)=\boldsymbol{l}(t)$ となるように定めると，$\boldsymbol{l}$ は周期 8 の写像で $\boldsymbol{l}(\mathbb{R})=L$ であり，$t\neq 8n,\ 2+8n,\ 4+8n$ $(n\in\mathbb{Z})$ において C^∞ 級で $\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\neq\boldsymbol{0}$ だから，L は区分的に滑らかな閉曲線である．

(2) $\Omega':=\mathbb{R}^2\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ とおくと $L\subset\Omega'$ である．$f:\Omega'\to\mathbb{R}$ を $f(\boldsymbol{u}):=\dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ で定義すると $\mathrm{grad}(f)=\boldsymbol{V}$ だから，$\boldsymbol{l}$ の周期を T とすれば $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}=f(\boldsymbol{l}(T))-f(\boldsymbol{l}(0))=f(\boldsymbol{l}(0))-f(\boldsymbol{l}(0))=0$.

(3) $\mathrm{div}\boldsymbol{W}=x^3-4y^3-y$. Gauss の発散定理より

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}\,dl&=\int_\Omega\mathrm{div}\boldsymbol{W}\,dxdy=\int_{-1}^{1}\Big(\int_{x-1}^{-x+1}(x^3-4y^3-y)dy\Big)dx=\int_{-1}^{1}\Big(2x^3\int_0^{-x+1}dy\Big)dx\\&=2\int_{-1}^{1}(-x^4+x^3)dx=-4\int_0^1x^4dx=-\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

（途中で偶関数・奇関数の性質を使った）

4. $\boldsymbol{u}_0\in\Omega$ は内点だから，$\epsilon>0$ を十分小さく取れば，$D:=\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^2\mid|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0|<\epsilon\}\subset\Omega$ が成立する．$\Omega':=\Omega\setminus D$, $L':=\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^2\mid|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0|=\epsilon\}$ とおくと $\partial\Omega'=L\cup L'$ である．L' を表す正則パラメータ $\boldsymbol{m}$ とし

て，$\boldsymbol{m}(t) := \begin{pmatrix} 1+\epsilon\cos(-t) \\ \epsilon\sin(-t) \end{pmatrix}$ を取ると，これは $\partial\Omega'$ の向きを表す．$\boldsymbol{m}(t)$ における単位法ベクトルを $\boldsymbol{n}_m(t)$ とおくと $\boldsymbol{n}_m(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

(1) $\boldsymbol{V}$ は Ω' 上定義されるから，Gauss の発散定理より $\displaystyle\int_{\Omega'} \mathrm{div}\boldsymbol{V}\,dxdy = \int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l} + \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_m\,d\boldsymbol{m}$. 一方 $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$ がわかるから,

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l} = -\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_m\,d\boldsymbol{m} = -\int_0^{2\pi} \frac{1}{\epsilon^2}\begin{pmatrix} \epsilon\sin t \\ \epsilon\cos t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}\left|\frac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)\right| dt = 0.$$

(2) Green の公式より $\displaystyle\int_{\Omega'} \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\,dxdy = \int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m}$. 一方 $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$ がわかるから,

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m} = -\int_0^{2\pi} \frac{1}{\epsilon^2}\begin{pmatrix} \epsilon\sin t \\ \epsilon\cos t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\epsilon\sin t \\ -\epsilon\cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

(3) $\Omega\setminus\{\boldsymbol{u}_0\}$ が単連結であると仮定する．このとき $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$ より，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる $f : \Omega\setminus\{\boldsymbol{u}_0\} \to \mathbb{R}$ が存在するが

$$-2\pi = \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m} = f(\boldsymbol{m}(2\pi)) - f(\boldsymbol{m}(0)) = f(\boldsymbol{m}(0)) - f(\boldsymbol{m}(0)) = 0$$

となるから矛盾．よって $\Omega\setminus\{\boldsymbol{u}_0\}$ は単連結でない.

配点：15, 15, 10, 10 (**1**: $3\times5=15$, **2**: $3\times5=15$, **3**: $3+3+4=10$, **4**: $3+3+4=10$)