特に断らなければ, 関数やベクトル場は全て C^∞ 級のものとする．ベクトルは縦横のどちらで書いても差し支えない.

1. (1) 関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に対し，$\boldsymbol{\varphi}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{\varphi}(s,t):=(s,t,f(s,t))$ で定義する．任意の $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ に対し，$\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial s}(a,b)$ と $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(a,b)$ は一次独立であることを示せ.
   (2) 関数 $g(x,y,z):=x+y+z-xyz$ に対し，$\mathrm{grad}(g)(p)=\mathbf{0}$ となる $p=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ を全て求めよ.
   (3) 関数 $h(x,y,z):=\log xyz$（自然対数）に対し，$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(h))$ を計算せよ.
   (4) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z):=(y^2+z^2,\,z^2+x^2,\,x^2+y^2)$ に対し，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を計算せよ.
   (5) 関数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ に対し，$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f))=\mathbf{0}$ を示せ.

2. $f(x,y,z):=x^2+y^2+(z/2)^2-1$ とおき，$S:=f^{-1}(0)$ とする.
   (1) $\mathrm{grad}(f)(p)=\mathbf{0}$ となる $p\in\mathbb{R}^3$ をすべて求めよ.
   (2) S は曲面であることを示せ.
   (3) $p=(a,b,c)\in S$ に対し，T_pS を表す方程式を求めよ.
   (4) $(2,-1,1)\in T_p^\perp S$ となるような $p=(a,b,c)\in S$ をすべて求めよ.
   (5) S が囲む有界領域 Ω の内側から外側に向かう法ベクトルにより S に向きを入れる．$\boldsymbol{V}(x,y,z):=(x,y,z)$ に対し，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ.

3. $S:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$ とおく.
   (1) S は曲面であることを示せ.
   (2) S の向き $\boldsymbol{n}:S\to\mathbb{R}^3$, $|\boldsymbol{n}|=1$ で，$\boldsymbol{n}(1,0,0)=(-1,0,0)$ となるようなものを求めよ.
   (3) $S':=\{(x,y,z)\in S \mid -1\le z\le 1\}$ は境界つきコンパクト曲面である（証明不要）．S' には (2) と同じ向きを入れる．ベクトル場

$$\boldsymbol{V}(x,y,z):=\left(x\cos\frac{\pi z}{2}+y\sin\frac{\pi z}{2},\,-x\sin\frac{\pi z}{2}+y\cos\frac{\pi z}{2},\,(x+y+z)\cos\frac{\pi z}{2}\right)$$

   に対し，$\displaystyle\int_{S'}\mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ.

4. $\Omega:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1+2xy\le z^2\}$ とする.
   (1) $\partial\Omega$ は曲面であることを示せ.
   (2) $\boldsymbol{V}(x,y,z):=\dfrac{(z,\,-z,\,-x+y)}{(-x+y)^2+2z^2}$ とする．$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を求めよ.（計算過程もわかるように答えよ）
   (3) Ω は単連結でないことを示せ.

配点：15, 15, 10, 10 (**1**: $3\times5=15$, **2**: $3\times5=15$, **3**: $2+2+6=10$, **4**: $2+2+6=10$)