幾何入門 期末試験（2014 年 8 月 1 日）解答例

担当：境 圭一

$\partial_x f = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ などと略記する．

1. (1) $k, l \in \mathbb{R}$ に対し $k(\partial_s \boldsymbol{\varphi})(a,b) + l(\partial \boldsymbol{\varphi}_t)(a,b) = \mathbf{0}$ とすると

$$k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ (\partial_s f)(a,b) \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ (\partial_t f)(a.b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ l \\ k(\partial_s f)(a,b) + l(\partial_t f)(a,b) \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

よって $k = l = 0$. 従って $(\partial_s \boldsymbol{\varphi})(a,b)$, $(\partial_t \boldsymbol{\varphi})(a,b)$ は一次独立である．

(2) $\mathrm{grad}(f)(x,y,z) = (1-yz, 1-zx, 1-xy) = \mathbf{0}$ とすると $xy = yz = zx = 1$．よって $x, y, z \neq 0$ であり，$\dfrac{xy}{yz} = \dfrac{1}{1}$ などから $x = y = z = \pm 1$ を得る．従って，求める点は $\pm(1,1,1)$.

(3) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \Delta f$ である．$\partial_x(\partial_x \log xyz) = -\dfrac{1}{x^2}$ などから，$\Delta f = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{z^2}$.

(4) $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \partial_y(x^2+y^2) - \partial_z(z^2+x^2) \\ \partial_z(y^2+z^2) - \partial_x(x^2+y^2) \\ \partial_x(z^2+x^2) - \partial_y(y^2+z^2) \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}$.

(5) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = \mathrm{rot}\begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y(\partial_z f) - \partial_z(\partial_y f) \\ \partial_z(\partial_x f) - \partial_x(\partial_z f) \\ \partial_x(\partial_y f) - \partial_y(\partial_x f) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

2. (1) $\mathrm{grad}(f) = (2x, 2y, z/2) = \mathbf{0}$ となるのは $(x,y,z) = \mathbf{0}$ のみ.

(2) f は C^∞ 級．また $f(\mathbf{0}) = -1 \neq 0$ より $\mathbf{0} \notin f^{-1}(0)$. 従って S 上 $\mathrm{grad}(f) \neq \mathbf{0}$ だから，S は曲面である．

(3) $T_pS = \{\boldsymbol{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}(f)(p) = 0\}$ より，求める方程式は $\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}(f)(p) = 2ax + 2by + cz/2 = 0$, つまり $4ax + 4by + cz = 0$.

(4) $(2,-1,1) \in T_p^{\perp}S$ とすると $\mathrm{grad}(f)(p) = (2a, 2b, c/2) = k(2,-1,1)$ $(k \in \mathbb{R})$ と書ける．この式から $a = k$, $b = -k/2$, $c = 2k$ を得る．$p \in S$ より $a^2 + b^2 + (c/2)^2 = 1$ だから $k^2(1 + (1/4) + 1) = 1$, よって $k = \pm\dfrac{2}{3}$. 従って $p = (a,b,c) = \pm\Big(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\Big)$.

(5) $\boldsymbol{V}$ は Ω 上で定義されており，$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 3$ である．向きに注意して Gauss の発散定理を使うと $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{V}\,dxdydz = 3\int_\Omega dxdydz = 3\cdot(\Omega\text{の体積}) = 8\pi$.

3. (1) $f(x,y,z) := x^2 + y^2 - 1$ とおくと f は C^∞ 級で $S = f^{-1}(0)$ である．$\mathrm{grad}(f) = 2(x,y,0) = \mathbf{0}$ となる点は $(0,0,z)$ の形の点全てである．$f(0,0,z) = -1 \neq 0$ だから $(0,0,z) \notin S$, 従って S 上 $\mathrm{grad}(f) \neq \mathbf{0}$ だから S は曲面.

(2) $p = (a,b,c) \in S$ $(a^2 + b^2 = 1)$ における単位法ベクトルは $\boldsymbol{n}(p) = \pm\dfrac{\mathrm{grad}(f)(p)}{|\mathrm{grad}(f)(p)|} = \pm(a,b,0)$ である．$\boldsymbol{n}(1,0,0) = (-1,0,0)$ と $\boldsymbol{n}$ の連続性から符号はマイナスでなければならず，従って $\boldsymbol{n}(p) = -(a,b,0)$.

(3) $\partial S'_\pm := \{(x,y,\pm 1) \in \partial S\}$ （複合同順，以下も同様）とおく．$p = (a,b,\pm 1) \in \partial S'_\pm$ における単位接ベクトル $\boldsymbol{n}_1(p)$ で，$\partial S'_\pm$ に直交し，曲面の内側から外側に向かうものは $\boldsymbol{n}_1(p) = (0,0,\pm 1)$ である．よって $\partial S'_\pm$ の向きは，接ベクトル

$$-(a,b,0) \times (0,0,\pm 1) = \pm(-b,a,0)$$

で与えられる．この向きを表すパラメータとして

$$\boldsymbol{l}_\pm : \mathbb{R} \to \partial S'_\pm, \qquad \boldsymbol{l}_\pm(t) := (\cos t, \pm\sin t, \pm 1)$$

を取ることができる．これらについて

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}_\pm(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{l}_\pm}{dt}(t)=\begin{pmatrix}\sin t\\ \mp\cos t\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \pm\cos t\\ 0\end{pmatrix}=-1$$

だから，Stokes の定理より

$$\int_{S'}\mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{\partial S'_+\cup\partial S'_-}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}=\sum_{*=\pm}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}_*(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{l}_*}{dt}(t)dt=2\int_0^{2\pi}(-1)dt=-4\pi.$$

4. (1) $\partial\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid 1+2xy=z^2\}$ である．$f(x,y,z):=1+2xy-z^2$ とおくと f は C^∞ 級で $S=f^{-1}(0)$，また $\mathrm{grad}(f)=2(y,x,-z)$ である．$\mathrm{grad}(f)(p)=\mathbf{0}$ となる p は $p=\mathbf{0}$ のみであり，$f(\mathbf{0})=1\neq 0$ だから，$\partial\Omega$ 上 $\mathrm{grad}(f)\neq\mathbf{0}$ である．よって $\partial\Omega$ は曲面である．

(2) $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=\mathbf{0}$. 詳細略.

(3) Ω 上で

$$(-x+y)^2+2z^2=(x^2+y^2+z^2)+(z^2-2xy)\geq 0+1$$

だから，$\boldsymbol{V}$ は Ω 上定義されている．$\boldsymbol{l}(t)=(l_1(t),l_2(t),l_3(t)):=\left(-\frac{\cos t}{\sqrt{2}},\frac{\cos t}{\sqrt{2}},\sin t\right)$ とおくと

$$l_3(t)^2-2l_1(t)l_2(t)=\sin^2 t-2\cdot\frac{-\cos^2 t}{2}=1$$

より $\boldsymbol{l}(t)\in\Omega$ となる．また

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t))=\frac{(\sin t,\ -\sin t,\ \sqrt{2}\cos t)}{2},\quad \frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)=\frac{(\sin t,\ -\sin t,\ \sqrt{2}\cos t)}{\sqrt{2}}$$

より $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ だから

$$\int_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}dt=\sqrt{2}\,\pi.$$

Ω が単連結であると仮定すると，$\boldsymbol{l}$ が閉曲線であることと $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=\mathbf{0}$ から $\int_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}=0$ となり矛盾．よって Ω は単連結でない.

問題 3 (3) について．$\boldsymbol{\varphi}:(0,2\pi)\times(-1,1)\to S$ を $\boldsymbol{\varphi}(s,t):=(\cos s,\sin s,t)$ で定めると，$\boldsymbol{\varphi}$ は向きを保たない局所座標である．これを用いて直接計算することもできる（が，かなり大変）.

問題 4 について．z 軸のまわりの $-\pi/4$ 回転

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\cos(-\pi/4)&-\sin(-\pi/4)&\\ \sin(-\pi/4)&\cos(-\pi/4)&\\ &&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

で回転してみると，Ω のうつる先は $\Omega'=\{-x^2+y^2+z^2\geq 1\}$ であることがわかる．よって Ω は一葉双曲面の「外側」である．また，回転した後の座標でみると，$\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{l}$ はそれぞれ

$$\tilde{\boldsymbol{V}}(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(0,-z,y)}{y^2+z^2},\qquad\tilde{\boldsymbol{l}}(t)=(0,\cos t,\sin t)$$

にうつる（こうなるように $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{l}$ を定義した）．これは演習 14 の問題 5, あるいはレポート 14 と全く同様の状況である.

もっとも，このことに気づかなくても，(1) と (2) だけなら機械的に計算することができる.

配点：15, 15, 10, 10 (**1**: $3\times5=15$, **2**: $3\times5=15$, **3**: $2+2+6=10$, **4**: $2+2+6=10$)

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html