2014 年度 幾何入門 期末試験 結果

担当：境 圭一

平均点は 25.6 点，最高点は 41 点でした．人数分布と各問題の平均点は以下のとおりです．

点数	11 ～ 15	16 ～ 20	21 ～ 25	26 ～ 30	31 ～ 35	36 ～ 40	41
人数	4	8	26	25	8	2	1

問題	1	2	3	4
平均	13.1	8.3	1.5	2.7

答案用紙 No. 1 の右上に赤で書いてあるのが期末試験の点数，青で書いてあるのはレポート 1 ～ 14 の点数の合計です（最大 30 点）．大問ごとの点数は各用紙の右下または裏面に書いてあります．何も書いてなければ 0 点です．また，○で囲ったアルファベットは最終的な成績です：

S：「秀」，　A:「優」，　B：「良」，　C：「可」，　F：「不可」

レポートは 各回 2 点 × 14 回 ですが，30 点分つけると最初に宣言しましたので，中間・期末試験を両方受験した人には +2 点つけました．[*1]

最終的な成績の分布は以下の通りです．中間・期末試験を受験しなかった場合は「不受講」としました．平均点は 69.7 点，最高点は 100 点でした（130 点満点）．

成績	不受講	不可 (F)	可 (C)	良 (B)	優 (A)	秀 (S)
人数	9	11	26	20	15	1

自分が書いた文章は誰かが読む，ということを忘れてはいけません．読み手に理解を委ねるような書き方はダメです．演習問題などで繰り返したパターンの解答であっても，大事なことを省略してはいけません．例えば問 2. (2) で「常に $\mathrm{grad}(f) \neq \mathbf{0}$ だから」と書いている人がたくさんいますが，では (1) は何だったのか，という話になります．もちろん正しくは「S 上では常に $\mathrm{grad}(f) \neq \mathbf{0}$ だから」です．同じようなことですが，「自分は理解している」ということを読み手に納得させるような答案の書き方を考えるべきです．例えば問 3. (3) では，$\partial S'$ の向きをきちんと吟味したことがわかるようにすべきです．そうでなければ，正しく理解しているとは判定されません．

日本語の問題ですが，例えば問 1. (5) で「f は C^∞ 級を用いると」というような書き方には違和感を覚えないといけないと思います．「f が C^∞ 級であることを用いると」ならストレスなく読めます．この類の日本語を書いてしまう人が多いように思います．意味が通じればいいというものではありません．

以下，問題ごとのコメントです．

1. ごく基本的な計算問題なので，答が間違っていればほとんど 0 点にしています．概ねできていましたが，対数関数を微分できない人が多いのは残念です．$\log xyz = \log|x| + \log|y| + \log|z|$ の形にすれば間違わないはずです．(2) の符号について，何も書いてなければ通常は複合同順の意味になると思いますが，誤解を防ぐため，書いておいたほうがいいと思います．3 次元ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の場合，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ はスカラー場（関数），$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ はベクトル場で，危惧していたほどではありませんでしたが，やはり間違う人がいました．2 階の偏微分の記号は $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ のように書いてください．なぜか分子の「2 乗」を書いていない人が多くいます．
2. 期待に反して出来が良くありませんでした．(2) については上記の通りです．T_pS は $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間ですから，原点を通るものが正解です．p を通るように平行移動していたものは 1 点引きました．(4) はレポート 10 とほぼ同一の問題です．また (5) は Gauss の発散定理を使えば容易で，講義でもやりましたし，教科書にも書かれています．対策が不十分だと思います．
3. もう少しできてほしかった問題です．(1) では $\mathrm{grad}(f) = \mathbf{0}$ となるのは原点のみ，という誤答が（予想通り）目立ちました．そういうパターンが多かったからといって，調べることを怠ってはいけません．(3) は $\partial S'$ の向きをき

[*1] 常識的には，中間・期末試験を両方受けることを単位取得の必要条件とすべきで，最初にそう宣言しなかったのですが，片方しか受験せずに 60 点以上取った人はいませんでした．

ちんと取れるかを見たい問題なので，答が合っていても減点したり，少しくらいの計算間違いではあまり減点していなかったりすることがあります．

4. (2) はかなり大変なことにすぐ気づくと思います．頑張ったところで 2 点ですから，これに時間をかけて他に手が回らなかったとすれば本末転倒です．問 2 などをきちんとやるべきでしょう．(3) では $\boldsymbol{V}$ が Ω 上定義されることは証明を要すると思います．適切な閉曲線を取るのは難しいだろうと思っていましたが，1 人が正しい閉曲線に辿り着き，他の 2 人が（残念ながらうまくいっていませんでしたが）解答例とは少し異なる，なかなか興味深い取り方をしていました．

採点には万全を期しましたが，万が一誤りがあると思われる場合は，早めに申し出てください．答案は全てコピーを取り保存していますので，ただちに調べます．

まとめ，今後の展望

この講義で扱った内容（ベクトル解析）の元にあるのは微分積分学の基本定理です．これが 2 次元または 3 次元でも成り立つようにするには，ベクトル場の微分（発散，回転）や積分（線積分，面積分）をどのように定義するのが正しいか，という観点から議論しました．その結果得られた Gauss の発散定理や Stokes の定理は微分積分学の基本定理の高次元化であり，ある種の積分は領域の境界での積分に等しい，というのが本質です．（試験では計算の簡略化のために使える，という側面しか扱いませんでしたが，これはあくまで副産物だと思います）

もう少し言うと，幾何学的対象にとっての大事な情報は，例えば境界のように，特別な点の周りに集まる（**局所化**する）ということが示唆されています．このような「局所化」の原理は，幾何学やトポロジーなどの至るところで現れ，その出どころは詰まるところ微分積分学の基本定理にあると見なせる，と思います．また，理論を展開する場であった曲線や曲面は「多様体」に一般化され，より高い視点からベクトル解析の内容を見直し，発展させることができます．今後の講義にもベクトル解析の片鱗が垣間見えることがあると思いますので，探してみてください．

(8/2)