2015 年度 幾何学特別講義 VI 小テスト (12/3) 略解

担当：境 圭一

答：$V_B = -x^{-6} + 3x^{-4} - 2x^{-2} + 4 - 2x^2 + 3x^4 - x^6$.

解法の例：図 1 左の交点 c_1（これは正の交点）で skein 関係式を使う．負に変えたものを L_1,「切った」ものを L_2 と書くと

$$x^{-2}V_B - x^2 V_{L_1} = \left(x - x^{-1}\right) V_{L_2}. \tag{$*$}$$

L_1 は「赤」の成分が他と分離し，青と黒は絡み数 -1 の Hopf 絡み目になっている．図 1 中の交点 c_2（これは負の交点）で skein 関係式を使えば，その Hopf 絡み目の Jones 多項式は $-x^{-5} - x^{-1}$ と計算される．分離した図式 $L = L' \sqcup L''$ に対し $V_L = dV_{L'}V_{L''}$ $(d := -x - x^{-1})$ だったことを使うと

$$V_{L_1} = (-x - x^{-1}) \cdot 1 \cdot (-x^{-5} - x^{-1}) = x^{-6} + x^{-4} + x^{-2} + 1.$$

実は L_2 は Whitehead 絡み目になっている．例えば図 1 右の交点 c_3 で skein 関係式を使えば，Hopf 絡み目と八の字結び目の Jones 多項式に帰着して，

$$V_{L_2} = x^{-7} - 2x^{-5} + x^{-3} - 2x^{-1} + x - x^3.$$

これらを $(*)$ に代入し整理すればよい．
こう書くと簡単そうだが，正確に計算するのは難しく，かなりの慎重さを要する．

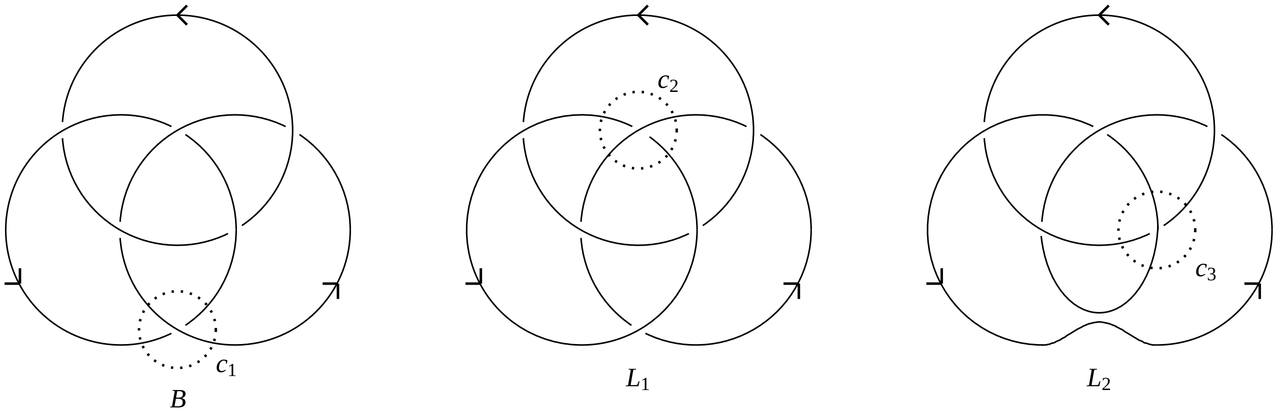

図 1　B の交点 c_1（正）を負に変えると L_1 に，「切る」と L_2 になる

コメント：B は交点を 6 個持ちます．どれか一つに着目します．どれについても，その上下を入れ替えると，自明な結び目と Hopf 絡み目に分離する絡み目になります．分離する絡み目 $L = L' \sqcup L''$ に対し $V_L = (-x - x^{-1})V_{L'}V_{L''}$ であることを使うとよいでしょう．これを積でなく足し算にしていた人が多くいました．
また，その交点を splice したものは Whitehead 絡み目です．この splice のやり方を間違えた人も多くいました．そうすると絡み目の向きが定まらなくなるので，間違いに気づくはずです．どの交点に着目するかによって鏡像が出る場合もあるので，解答例にあるものとは x の次数の符号が逆になった人もいると思います．
講義中に言いませんでしたが，Jones 多項式は偶数次の項と奇数次の項を同時に含むことはあり得ず，L の成分数（ひもの本数）を k とするとき

- k が奇数のとき，V_L は x の偶数次の項のみからなり，
- k が偶数のとき，V_L は x の奇数次の項のみからなる

ということが言えます．これは図式の交点数に関して帰納的に証明できますので（skein 関係式を使う），興味があれば考えてみるとよいでしょう．答に偶数次の項と奇数次の項が混在してしまったときは，どこかで計算間違いをしています．今回は 3 成分絡み目でしたので，答は偶数次の項だけからなります．

誤解を避けるため，答は降べきまたは昇べきの順に揃えて書くべきだと思います．Borromean 環の場合，そのように書くと対称性に気づくと思います．

10 点満点で採点しました．V_B を skein 関係式で求めるためには，別の二つの絡み目の Jones 多項式を求める必要があり，それぞれ 5 点です．それぞれもまた skein 関係式で計算する必要があり，その過程に部分点がついている場合があります．平均点は 5.0 点でした．
境も当初の解答例が冗長であることに気づいて書き直しを迫られたように，絡み目の絵を正確に把握するのはそう簡単ではないと思います．そういうわけで満点はいないかもしれないと思っていましたが，幸いなことに 8 人が正しい答までたどり着いており，少しだけ安堵しました．