幾何入門 演習問題 1（2016 年 4 月 8 日）

担当：境 圭一

1. (1) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}), \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}), \boldsymbol{w} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ を計算せよ.

   (2) (1) の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対し，$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ であることを示せ.

2. $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ を $\mathbb{R}^n$ のベクトルとする.

   (1) $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ が**一次独立**であることの定義を述べよ．また，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ が**一次従属**であることの定義を述べよ.

   (2) $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ が一次独立であるとき，$i = 1, \ldots, k$ に対し $\boldsymbol{u}_i \neq \boldsymbol{0}$ であることを示せ.

3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}$ などは全て $\mathbb{R}^3$ のベクトルとする．以下を示せ.

   (1) $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. また，$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が一次従属

   (2) $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u} = 0, (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} = 0$

   (3) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$

   (4) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$（ヒント：(3) を使う）

   (5) $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$

   (6) $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}$（ヒント：(5) を使う）

   (7) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})) \cdot \boldsymbol{a}$（ヒント：(6) を使う）

4. $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^2$ の一次独立なベクトルとする．これらを横に並べて得られる 2×2 行列を $A := \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を二辺とする平行四辺形の面積は $|\det A|$ に等しいことを示せ．$\det A > 0$ になるときと $\det A < 0$ になるときの違いは何か？

5. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ が一次独立であるとき，$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ が右手系をなすことを，以下の手順で示せ（絵を描きながら考えよ).

   (1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$（ただし $a_1, b_2 > 0, c_3 \neq 0$ とする）の形のベクトルを考える.

   $$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \text{ が右手系をなす} \iff c_3 > 0$$

   を，絵を描いて確かめよ.

   (2) $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ が右手系をなすことと，これらを原点の周りに一斉に回転させて (1) の形の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ ($a_1 > 0$, $b_2 > 0$, $c_3 > 0$) に重ねられることは同値であることがわかる．一方「原点の周りに回転させる」とは，$\det P = 1$ であるような直交行列 P を掛けることで実現される．以上のことから次を示せ：

   $$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \text{ が右手系をなす} \iff \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) > 0$$

   (3) 問題 3. (5) で $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ とおくことにより，$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ が右手系をなすことを示せ.

6. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対し，**三角不等式**

   $$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}| \leq |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}| + |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}|$$

   を証明せよ.（ヒント：Cauchy-Schwarz の不等式より $(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) \leq |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}|$ であることを使う）

7. 講義で証明を省略した補題 1, 3 を証明せよ.

（提出の必要はありません）

注意．深谷先生の教科書では，ベクトルの長さを $\|\boldsymbol{u}\|$ と表しています．この講義では $|\boldsymbol{u}|$ と書いています．どちらを使っても構いません.

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html

幾何入門 レポート問題 1（2016 年 4 月 8 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}$ などは全て $\mathbb{R}^3$ のベクトルとする．以下を示せ．

(i) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$ （ヒント：4/8 の問題 3. (7) に (3) を代入する）

(ii) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角を θ とするとき，$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin\theta$（ヒント：(i) で $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{d} = \boldsymbol{v}$ とおき，$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta$ を使う）

（4/15 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html