

特に断らなければ  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とする.  $\mathbf{0}$  は  $\mathbb{R}^2$  の原点 (ゼロベクトル) である.

1. 次の二変数関数  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を考える:

$$f(\mathbf{u}) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \\ 0 & \mathbf{u} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

- (1)  $f$  は  $\mathbf{0}$  において連続であることを示せ. (ヒント: 極座標  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  を使う)
  - (2)  $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0})$  が存在することを示し, その値を求めよ.  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  は  $\mathbf{0}$  において連続か?
  - (3)  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, |\mathbf{v}| = 1$  とする. 点  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  における  $f$  の  $\mathbf{v}$  方向の方向微分を定義通り計算せよ.
  - (4) (3) の方向微分の値が最大になるときの  $\mathbf{v}$  を求めよ.
  - (5)  $\text{grad}(f)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  を計算し (4) と比較せよ.
2. 次の二変数関数  $g, h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  が連続になるような定数  $a, b$  は存在するか? 存在するならその値を求め, 存在しないならそのことを証明せよ.

$$g(\mathbf{u}) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \\ a & \mathbf{u} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad h(\mathbf{u}) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} & \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \\ b & \mathbf{u} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

3. 次のベクトル場を図示せよ. ただし (3), (4) では原点での値は考えない.

- (1)  $\mathbf{W}(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- (2)  $\mathbf{V}(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$
- (3)  $\mathbf{T}(\mathbf{u}) := \frac{1}{|\mathbf{u}|} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$  (ヒント:  $|\mathbf{T}(\mathbf{u})|$  の値は?)
- (4)  $\mathbf{G}(\mathbf{u}) := -\frac{1}{|\mathbf{u}|^3} \mathbf{u}$  (ヒント: 原点近くでの  $|\mathbf{G}(\mathbf{u})|$  の値は? 原点から遠いところでは?)

4.  $f(\mathbf{u}) = xy$  とおく.

- (1)  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta (r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$  とおく.  $f$  を  $r, \theta$  を使って表せ.
  - (2) (1) の結果を  $g(r, \theta)$  とおく.  $\theta$  を一つ固定する.  $z = g(r, \theta)$  のグラフを  $rz$  平面に描け. ( $\theta$  で場合分けせよ)
  - (3) (2) で描いたグラフを全ての  $\theta$  について考えることにより,  $z = f(\mathbf{u})$  のグラフを完成させよ.
  - (4)  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{u}$  を求めよ.
5. 次の  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  について,  $z = f(\mathbf{u})$  のグラフを描け. また  $\text{grad}(f)$  を図示し,  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{u}$  を全て求めよ.

- (1)  $f(\mathbf{u}) = x^2 - y^2$
- (2)  $f(\mathbf{u}) = \frac{1}{|\mathbf{u}|^2}$  (ただし  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  とする)
- (3)  $f(\mathbf{u}) = \sin x \cos y$  (ヒント: 定数  $k$  に対し, 平面  $y = k$  で切った切り口を考える.  $k$  で場合分けせよ)
- (4)  $f(\mathbf{u}) = x^2 y$  (ヒント: 前問と同様.  $k > 0, k = 0, k < 0$  で場合分けする)
- (5)  $f(\mathbf{u}) = x^3 + yx$  (ヒント: 前問と同様)

6. (1)  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$  となる  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を求めよ.

(2)  $\text{grad}(g)(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$  となる  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  は存在するか?

(提出の必要はありません)

幾何入門レポート問題 2 (2016 年 4 月 15 日)

担当：境 圭一

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  に対し  $f(\mathbf{u}) := x^2 + 2xy - x - y^3$  とする .  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{u}$  を全て求めよ .

(4/22 の 3 限開始時まで提出してください)

[http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16\\_geometry/16\\_geometry.html](http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html)