幾何入門 演習問題 3（2016 年 4 月 22 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. 次のパラメータ $\boldsymbol{l}$ が定める曲線 $L \subset \mathbb{R}^2$ を図示せよ．
   (1) $\boldsymbol{l} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$（ただし a, b は定数で $0 < a \leq b$ とする）
   (2) $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ t \end{pmatrix}$
   (3) $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t - e^{-t} \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix}$
   (4) $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$（ヒント：$t = 0$ の近くでの挙動に注意せよ）
2. (1) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{ab}\begin{pmatrix} -y \\ 2x \end{pmatrix}$ と前問 (1) の $\boldsymbol{l}$ に対し，線積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} -y \\ 1 - x \end{pmatrix}$ と前問 (2) の $\boldsymbol{l}$（ただし $-1 \leq t \leq 1$ とする）に対し，線積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
3. (1) $\boldsymbol{l} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1 - t^2} \end{pmatrix}$ が定める曲線 L を図示せよ．また $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (2) $h : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $h(t) := -\cos t$ は $h' \geq 0$ をみたすことを示せ．$\widetilde{\boldsymbol{l}} := \boldsymbol{l} \circ h$ とおき，$\displaystyle\int_{\widetilde{\boldsymbol{l}}} \boldsymbol{V} \cdot d\widetilde{\boldsymbol{l}}$ を計算し (1) と比較せよ．
4. $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を微分可能な二変数関数，$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を微分可能な一変数関数，$\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を曲線のパラメータ，$a, b \in \mathbb{R}$ を定数とする．$af + bg, fg : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \boldsymbol{l} \circ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

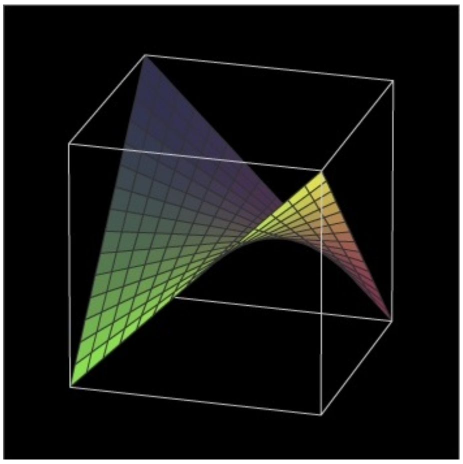
$$(af + bg)(\boldsymbol{u}) := af(\boldsymbol{u}) + bg(\boldsymbol{u}), \quad (fg)(\boldsymbol{u}) := f(\boldsymbol{u})g(\boldsymbol{u}), \quad (h \circ f)(\boldsymbol{u}) := h(f(\boldsymbol{u})), \quad (\boldsymbol{l} \circ h)(t) := \boldsymbol{l}(h(t))$$

   で定める．次のことを示せ：

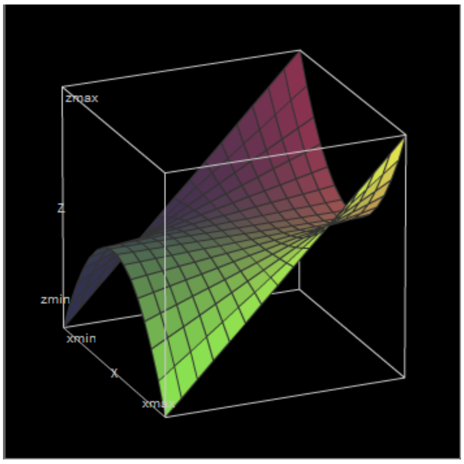
$$\mathrm{grad}(af + bg) = a\,\mathrm{grad}(f) + b\,\mathrm{grad}(g), \quad \mathrm{grad}(fg)(\boldsymbol{u}) = g(\boldsymbol{u})\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{u})\mathrm{grad}(g)(\boldsymbol{u}),$$
$$\mathrm{grad}(h \circ f)(\boldsymbol{u}) = h'(f(\boldsymbol{u}))\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}), \qquad \frac{d(\boldsymbol{l} \circ h)}{dt}(t) = h'(t)\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(h(t))$$

5. $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ で定義する．$\boldsymbol{l}$ が表す曲線 L を図示せよ．任意の C^∞ 級関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，$h' > 0$ をみたし，$h(s_0) = 0$ となる s_0 が存在するものに対し，$\dfrac{d(\boldsymbol{l} \circ h)}{ds}(s_0) = \boldsymbol{0}$ であることを示せ．
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は微分可能であるとする．$\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ が表す曲線上の点 $\boldsymbol{l}(t_0)$ において $\boldsymbol{l}$ に接する直線は $\boldsymbol{m}(t) := \boldsymbol{l}(t_0) + (t - t_0)\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t_0)$ で表されることを示せ．$\boldsymbol{m}$ の第 2 成分と，f の $t = t_0$ における Taylor 展開を比較せよ．
7. 人工衛星を打ち上げるには（重力に対して）仕事が必要だが，周回軌道に乗った後は仕事は必要でない．このことを次のようなモデルで検証しよう．$\mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\} := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}\}$ である．
   (1) 地球の重力のモデルとして，$\mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|^3}\boldsymbol{u}$ を考える．地球の半径を r とし，高さ h までの打ち上げの軌道として，$\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ が表す線分 $\boldsymbol{l} : [r, r + h] \to \mathbb{R}^2$ を考える．線積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{l}$ を求めよ．（打ち上げに要する仕事の -1 倍である）
   (2) $\boldsymbol{m}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$ で定まる曲線 $\boldsymbol{m} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ に対し，線積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{m}$ を求めよ．（高さ $R - r$ の周回軌道を一周するのに要する仕事の -1 倍である）
   (3) (1) の線積分の $h \to +\infty$ における極限値が有限であることを示し，その物理的な意味を考えよ．

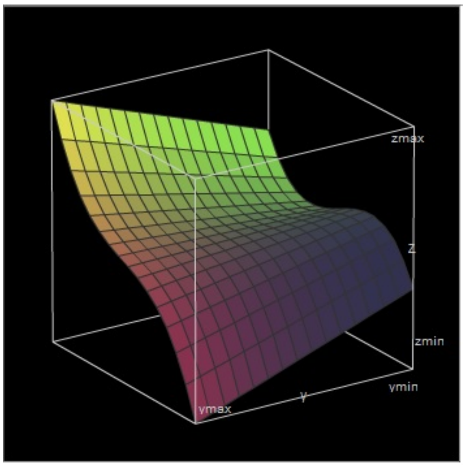
（提出の必要はありません）



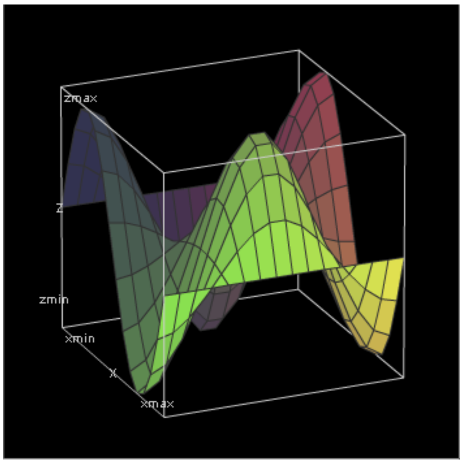
$z = xy$



$z = x^2 y$



$z = x^3 - xy$



$z = \cos x \cos y \ (-\pi \leq x, y \leq \pi)$

参考：3D Function Grapher, `http://www.math.uri.edu/~bkaskosz/flashmo/graph3d/`

幾何入門 レポート問題 3（2016 年 4 月 22 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ と，パラメータ $\boldsymbol{l} : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ 3\sqrt{1-(t^2/4)} \end{pmatrix}$ で表される曲線 L に対し，$\displaystyle\int_l \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を求めよ．（ヒント：L が楕円の上半分であることに注意し，パラメータを変換する）

（5/6 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html