幾何入門 レポート 3（2016 年 4 月 22 日）コメント

担当：境 圭一

定義通りに計算しても容易ですが，$h : [0,\pi] \to [-2,2]$ を $h(t) := -2\cos t$ で定義し，パラメータ $\widetilde{l} := l \circ h$ を使うと，$\dfrac{d\widetilde{l}}{dt}$ の計算が簡単になります．4/22 の問題 3 が，このようなパラメータ変換を思いつくためのヒントです．具体的な計算は可能ならば回避し，回避できないとしてもなるべく簡単な方法を選ぶ，というのが，計算間違いを減らす唯一の方法だと思います．こういう感覚はいろいろやってみるうちに身につくものだと思いますので，講義で解説していない問題にもできるだけ挑戦してみてください．

講義中の命題 19 で述べたように，線積分はパラメータの選び方によりませんが，それはパラメータ変換 h を**単調増大**に取った場合です．はっきり言わなかったのを反省しているのですが，もし h を単調減少に取って $\bar{\boldsymbol{l}} := \boldsymbol{l} \circ h$ とすると

$$\int_{\bar{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\bar{\boldsymbol{l}} = -\int_{l} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$$

です（命題 19 の証明と同様に示されます）．この問題の場合，たまたま答を 0 にしてしまったので，単調減少なパラメータ変換 h でも正解にはたどり着きますが，その場合はもちろん減点です．

また，例えば $h(\theta) = -\cos\theta$ と変換したあと

$$\boldsymbol{l}(\theta) = \begin{pmatrix} -2\cos\theta \\ 3\sin\theta \end{pmatrix}$$

のように書いている人が多いのが気になります．$\boldsymbol{l}$ はあくまで $\boldsymbol{l}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2\sqrt{1-(t/2)^2} \end{pmatrix}$ ですから，$\boldsymbol{l}$ を使い続けると $\boldsymbol{l}(\theta) = \begin{pmatrix} \theta \\ 2\sqrt{1-(\theta/2)^2} \end{pmatrix}$ です．$\widetilde{\boldsymbol{l}}(\theta) = \boldsymbol{l}(h(\theta))$ とおくなど，記号が混乱しないよう注意する必要があります．

センスの悪い問題設定にしてしまったので答は 0 になりました．線積分の値は任意の実数を取り得ますから，答が 0 になろうと負の値になろうと全く不思議はありません．いつもこうだったから，という思い込みのために試験で誤った答案を書いてしまう人が，毎回必ずいます．数学をやる上で先入観は大敵です．例えば今後，円周に沿った線積分を扱うことが多いと思いますが（計算しやすいから），線積分はいつも円周に沿って行うわけでもありません．問題文をよく読むことが大切です．