幾何入門 演習問題 4（2016 年 5 月 6 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 5x^4 + 4x^3y - 15x^2y^2 + 4xy^3 - y^4 \\ x^4 - 10x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + 5y^4 \end{pmatrix}$ と，$\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ $(0 \leq t \leq 1)$ で表される曲線を考える．
   (1) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を定義通り計算せよ．
   (2) $\boldsymbol{V} = \operatorname{grad}(f)$ となる関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ をひとつ見つけよ．これを利用して $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
2. 次の領域 Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ と，$\boldsymbol{l}$ で表される Ω 上の曲線について，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (1) $\Omega := \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x^2 - y \\ y^2 - x \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ $(0 \leq t \leq 1)$
   (2) $\Omega := \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} -\sin x \sin y \\ \cos x \cos y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix}$ $(-\pi/4 \leq t \leq \pi/4)$
   (3) $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{2\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t - 1 \\ 2t + 1 \end{pmatrix}$ $(-1 \leq t \leq 1)$
   (4) $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} y(y^2 - x^2) \\ x(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \end{pmatrix}$ $(0 \leq t \leq 2)$
3. (1) $\boldsymbol{l} : [a, b] \to \Omega$ が**閉曲線**を表す，つまり $\boldsymbol{l}(a) = \boldsymbol{l}(b)$ をみたすとする．領域 Ω 上の C^∞ 級関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \operatorname{grad}(f) \cdot d\boldsymbol{l} = 0$ を示せ．
   (2) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 2y \\ x \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{V} = \operatorname{grad}(f)$ となる C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は存在しないことを示せ．
4. 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された二変数関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を（スカラーに値を持つので，ベクトル場に対応して）**スカラー場**ともいう．$\boldsymbol{l} : [a, b] \to \Omega$ が定める曲線を $L := \boldsymbol{l}([a, b])$ とする．スカラー場 f の L に沿った**線積分**を
$$\int_L f\, dL := \int_a^b f(\boldsymbol{l}(t)) \left| \frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) \right| dt$$
   で定義する．$\displaystyle\int_L f\, dL$ はパラメータ $\boldsymbol{l}$ の取り方によらず，曲線 L のみで決まることを示せ．
5. (1) $\mathbb{R}^n$ 自身は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ．
   (2) $A := [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合でも閉集合でもないことを示せ．A の内部 A° を求めよ．
   (3) $B := (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合であることを示せ．B° を求めよ．
   (4) $C := (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合であることを示せ．C° を求めよ．
   (5) 任意の集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対し，Ω° は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ．ただし空集合 $\emptyset$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合と <u>定める</u>.
6. Λ を（可算とは限らない）集合とし，各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\mathbb{R}^n$ の開集合 U_λ が定まっているとする．このとき，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ と $\bigcap_{k=1}^n U_{\lambda_k}$ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda)$ はともに $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ．$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が開集合とならない例を挙げよ．
7. $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^2$ を中心とし，半径 1 である円周を S^1 と書き，**1 次元球面**と呼ぶ．すなわち $S^1 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$.
   (1) S^1 は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ．
   (2) 次の文は「S^1 は弧状連結である」ことの**誤った**証明である．間違いを指摘せよ．
   「**証明**」（誤り）任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S^1$ に対し，$\boldsymbol{\gamma} : [0, 1] \to S^1$ を $\boldsymbol{\gamma}(t) := (1 - t)\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ で定めると，$\boldsymbol{\gamma}(t)$ は t の 1 次式だから連続で，$\boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\gamma}(1) = \boldsymbol{v}$ である．よって S^1 は弧状連結である．
   (3)「S^1 は弧状連結である」ことの正しい証明を与えよ．
8. (1) $U, V \subset \mathbb{R}^n$ が弧状連結な領域で $U \cap V \neq \emptyset$ であるとき，和集合 $U \cup V$ も弧状連結であることを示せ．
   (2) 弧状連結な領域 $U, V \subset \mathbb{R}^n$ で，共通部分 $U \cap V$ は弧状連結でないようなものの例を挙げよ．

（提出の必要はありません）

幾何入門 レポート問題 4（2016 年 5 月 6 日）

担当：境 圭一

$\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := 2e^{-|\boldsymbol{u}|^2}\boldsymbol{u}$ と，$\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 1)$ で表される曲線に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を求めよ．

（5/13 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html