幾何入門 演習問題 5（2016 年 5 月 13 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. $L := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid (x/2)^2 + (y/3)^2 = 1\}$ とおき，L が囲む有界領域を Ω とする．
   (1) $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix}$ は L を表す正則なパラメータであることを示せ．周期を求めよ．
   (2) 点 $\boldsymbol{l}(t) \in L$ における単位接ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ と単位法ベクトル $\boldsymbol{n}(t)$ を求めよ．
   (3) Ω を図示せよ．(2) で求めた $\boldsymbol{n}(t)$ は Ω の境界の向きを表すか？絵を描いて確認せよ．
2. $L := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ y = 0$ または $1\} \cup \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0$ または $1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ とおく．
   (1) L を図示せよ．
   (2) L を表すパラメータ $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で，周期的，区分的に正則であり，L が囲む有界領域の境界の向きを表すものを一つ求めよ．さらに，その周期を求めよ．
3. $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |\boldsymbol{u}| \leq 2\}$ とおく．
   (1) Ω を図示せよ．Ω は有界領域であることを示せ．
   (2) Ω の境界 $\partial\Omega$ を求めよ．$\partial\Omega$ の向きを表すような正則パラメータを一つ求めよ．
   (3) Ω の補集合 $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{u} \notin \Omega\}$（講義では Ω^c と書いた）は有界領域ではないことを示せ．
4. 次の曲線 L について，（区分的に）正則なパラメータ $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を一つ求め，各 $\boldsymbol{l}(t)$ における単位接ベクトルと単位法ベクトルを求めよ．L が閉曲線の場合は，L が囲む有界領域の境界の向きを表すようにし，周期も求めよ．
   (1) $L := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$, ただし $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級関数
   (2) $L := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid x^{2/3} + y^{2/3} = 1\}$
   (3) $L := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 2y^2 = 4\}$（参考：信州大学理学部平成 26 年度入試問題）
5. $L := \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}$ とおく．
   (1) $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ は L を表す正則パラメータであることを示せ．
   (2) $\boldsymbol{m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{m}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ t^3 \end{pmatrix}$ も L を表すパラメータであることを示せ．$\boldsymbol{m}$ が正則でない理由を述べよ．
6. $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t - \cos t \\ 1 - \sin t \end{pmatrix}$ で表される曲線 L を**サイクロイド** (cycloid) という．L を図示せよ．パラメータ $\boldsymbol{l}$ は正則か？
7. $0 \leq a \leq 1$ を定数とし，$\boldsymbol{l}_a(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}$ で定まる曲線を考える．
   (1) $0 \leq a < \dfrac{1}{3}$ のとき，$\boldsymbol{l}_a$ は滑らかな閉曲線を表すことを示せ．その周期を求めよ．
   (2) $a = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\dfrac{d\boldsymbol{l}_a}{dt}(t) = \boldsymbol{0}$ となる t を求めよ．$\dfrac{1}{3} < a$ のとき，$\boldsymbol{l}_a$ は滑らかな曲線を表すか？
8. 曲線 L の正則パラメータ $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ について，この二つが同じ向きを表すとき，$\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{m}$ と書くことにする．$\approx$ は**同値関係**であることを示せ．すなわち，以下のことを示せ：
   (i) $\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{l}$
   (ii) $\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{m}$ ならば $\boldsymbol{m} \approx \boldsymbol{l}$
   (iii) $\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{m}$ かつ $\boldsymbol{m} \approx \boldsymbol{n}$ ならば $\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{n}$
9. $S^1 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ とする．閉曲線 $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は，連続写像 $S^1 \to \mathbb{R}^2$ ともみなせることを示せ.（ヒント：$\boldsymbol{l}$ の周期を T とするとき，$\boldsymbol{m} : S^1 \to \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{m}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} := \boldsymbol{l}(T\theta/2\pi)$ で定め，well-defined であることを確かめる）
10. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を，滑らかな閉曲線 $L_1, \ldots, L_k$ で囲まれた有界領域とする．境界 $\partial\Omega = L_1 \cup \cdots \cup L_k$ の向きは，法ベクトルが Ω の内側から外側に向かうような向きとする，と約束した．ところで，そもそも「内側から外側に向かう」とは（直感的には明らかだろうが）厳密にはどのように定義したらよいか？

（提出の必要はありません）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html

訂正．演習の時間に問題 2 を解説しましたが，答に誤りがありましたので訂正します．周期 4 のパラメータ $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ として，例えば

$$\boldsymbol{l}(t) := \begin{cases} (t - 4n,\ 0) & 4n \le t \le 4n+1 \\ (1,\ t - 4n - 1) & 4n+1 \le t \le 4n+2 \\ (-t + 4n + 3,\ 1) & 4n+2 \le t \le 4n+3 \\ (0, -t + 4n + 4) & 4n+3 \le t \le 4n+4 \end{cases}$$

を取ることができます．ただし $n \in \mathbb{Z}$ です．

補足：$\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)$ を接ベクトルと呼ぶことについて
講義で話す時間がないので，ここで補足しておきます．以下は実質的に演習 3 (4/22) 問 6 の解答でもあります．

正則パラメータ $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で表される曲線 $L = \boldsymbol{l}(\mathbb{R})$ を考えます．
定義．$\boldsymbol{l}(a) \in L$ における L の**接線**とは

$$\boldsymbol{l}(a) \text{ を通り } \frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(a) \text{ に平行な直線} \tag{$*$}$$

のこと．

一方，今までは「接線」と言えば

$$y = f(x) \text{ のグラフの接線の式は } y = f'(a)(x-a) + f(a) \text{ である} \tag{$**$}$$

という形で出てきていたと思います．$(*)$ と $(**)$ は，次に見るように同一のものです．
(1) まず，$\boldsymbol{l}$ が一変数 C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を用いて

$$\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

で表される場合を考えます．このときの L は f のグラフです．この $\boldsymbol{l}$ は L の正則パラメータです：

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}.$$

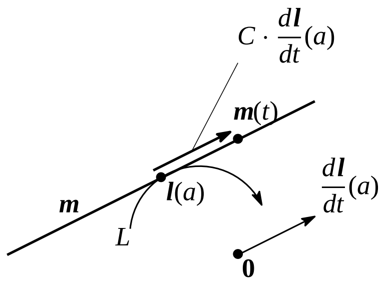
$(*)$ をみたす直線は

$$\boldsymbol{m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{m}(t) := \boldsymbol{l}(a) + (t-a)\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(a)$$

で表せます（右図で $C = t - a$ とおいた）．成分を計算してみると

$$\boldsymbol{m}(t) = \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} + (t-a)\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ f'(a)(t-a) + f(a) \end{pmatrix}$$

ですから，$\boldsymbol{m}$ は直線 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ を表します．これは $(**)$ と一致します．



少なくともこの $\boldsymbol{l}$ の場合，$(*)$ は今までよく知っていた「接線」$(**)$ に一致し，従って $\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)$ は「接線」に平行であることになるので，$\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)$ を「接ベクトル」と呼ぶことにするのは自然だと思えることでしょう．

(2) 一般の正則パラメータ $\boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ で表される曲線 L の場合，正則性から $l_1'(a) \neq 0$ または $l_2'(a) \neq 0$ の少なくとも一方が成り立ちます．例えば $l_2'(a) \neq 0$ の場合，**逆関数定理**により，$l_2(a)$ の近くだけで定義される l_2 の逆関数 h が存在します．h は逆関数ですから $l_2(h(s)) = s$ をみたします．$\widetilde{\boldsymbol{l}} := \boldsymbol{l} \circ h$ も（$\boldsymbol{l}(a)$ 付近では）L を表します．$g := l_1 \circ h$ とおくと

$$\widetilde{\boldsymbol{l}}(s) = \boldsymbol{l}(h(s)) = \begin{pmatrix} l_1(h(s)) \\ l_2(h(s)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(s) \\ s \end{pmatrix}$$

ですから，L は $\boldsymbol{l}(a)$ の近くでは，ある関数 $x = g(y)$ のグラフであることがわかります．(1) と同様に，$\dfrac{d\widetilde{\boldsymbol{l}}}{ds}(s)$ は $(**)$ の意味の「接線」に平行であることがわかります．また，$\dfrac{d\widetilde{\boldsymbol{l}}}{ds}(s)$ と $\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(h(s))$ が平行なのは講義で見た通りです．

なお，接線の式 $(**)$ を $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ と書けば，これは f の Taylor 級数の 1 次の項までを取ったものであることに気づきます．Taylor 級数は f を多項式で近似するものですが，1 次式による近似を接線と呼ぶわけです．

幾何入門 レポート問題 5（2016 年 5 月 13 日）

担当：境 圭一

曲線 $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$ を図示せよ．L を表すパラメータ $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で，周期的，区分的に正則であり，L が囲む有界領域の境界の向きを表すものを一つ求めよ．さらに，その周期を求めよ．

（5/20 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html