幾何入門 演習問題 6（2016 年 5 月 20 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ と C^∞ 級関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を考える．次の等式が成り立つことを示せ．
   (1) $\mathrm{div}(a\boldsymbol{V} + b\boldsymbol{W}) = a\,\mathrm{div}\boldsymbol{V} + b\,\mathrm{div}\boldsymbol{W}$, $\mathrm{rot}(a\boldsymbol{V} + b\boldsymbol{W}) = a\,\mathrm{rot}\boldsymbol{V} + b\,\mathrm{rot}\boldsymbol{W}$ （ただし $a, b \in \mathbb{R}$ は定数）
   (2) $\mathrm{div}(f\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}(f) \cdot \boldsymbol{V} + f\mathrm{div}\boldsymbol{V}$, ただし $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$ とするとき，$(f\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{u})V_1(\boldsymbol{u}) \\ f(\boldsymbol{u})V_2(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}$
   (3) $\mathrm{rot}(f\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}(f) \cdot \widetilde{\boldsymbol{V}} + f\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$, ただし $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$ とするとき，$\widetilde{\boldsymbol{V}} := \begin{pmatrix} V_2 \\ -V_1 \end{pmatrix}$
   (4) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ （注：このことから「$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} \neq 0 \implies \boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ をみたす f は存在しない」がわかる）
   (5) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ （注：$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ を **Laplace 方程式**，その解 f を**調和関数** (harmonic function) と呼ぶ）
2. $a, b \in \mathbb{R}$ を定数とする．$L := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = 1\}$ で囲まれた有界領域を Ω とおき，Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x + y \\ -y \end{pmatrix}$ を考える．
   (1) L を表す周期的な正則パラメータ $\boldsymbol{l}$ で，$\partial\Omega$ の向きを表すものを一つ求めよ．また，その周期 T を求めよ．
   (2) (1) で定めたパラメータに対し，$\boldsymbol{l}(t) \in L$ における単位法ベクトル $\boldsymbol{n}(t)$ を求めよ．
   (3) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l}$ と $\displaystyle\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{V} dxdy$ をそれぞれ計算し，Gauss の発散定理が成り立っていることを確認せよ．
   (4) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ と $\displaystyle\int_\Omega \mathrm{rot}\boldsymbol{V} dxdy$ をそれぞれ計算し，Green の公式が成り立っていることを確認せよ．
3. 次の領域 Ω とベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，Gauss の発散定理と Green の公式が成り立つことを直接計算で確かめよ．
   (1) $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x + 2xy \\ x - y^2 \end{pmatrix}$
   (2) $\square_r := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq r,\ |y| \leq r\}$ とするとき，$\Omega := \square_2 \setminus \square_1$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}$
   (3) $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |\boldsymbol{u}| \leq 2\}$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$
4. L を向き付けられた滑らかな曲線とし，$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ をその向きを表す正則パラメータとする．$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ に対応する単位法ベクトルを $\boldsymbol{n}_l, \boldsymbol{n}_m$ とするとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_l\,d\boldsymbol{l} = \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_m\,d\boldsymbol{m}$ を示せ．（教科書 p. 31 の補題 1.44 参照）
5. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級関数で，全単射かつ $h' < 0$ をみたすとする．滑らかな曲線 L を表す正則パラメータ $\boldsymbol{l}$ に対し，$\bar{\boldsymbol{l}} := \boldsymbol{l} \circ h$ とおく．また $\boldsymbol{V}$ を，L を含む領域上で定義されたベクトル場とする．
   (1) $\bar{\boldsymbol{l}}$ は正則で，L に定める向きは $\boldsymbol{l}$ と逆であることを示せ．また $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{\bar{\boldsymbol{l}}} \boldsymbol{V} \cdot d\bar{\boldsymbol{l}}$ を示せ．
   (2) $\boldsymbol{l}(t), \bar{\boldsymbol{l}}(t)$ における単位法ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{n}(t), \bar{\boldsymbol{n}}(t)$ とするとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l} = -\int_{\bar{\boldsymbol{l}}} \boldsymbol{V} \cdot \bar{\boldsymbol{n}}\,d\bar{\boldsymbol{l}}$ を示せ．
6. $i = 1, 2$ に対し，$L_i := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}| = i\}$ とおく．L_i を表す正則パラメータ $\boldsymbol{l}_i$ $(i = 1, 2)$ を，L_i が囲む有界領域の境界の向きを表すように取る．$\boldsymbol{l}_i(t)$ における単位法ベクトルを $\boldsymbol{n}_i(t)$ とする．
   (1) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$ をみたすとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}_1} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_1\,d\boldsymbol{l}_1 = \int_{\boldsymbol{l}_2} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_2\,d\boldsymbol{l}_2$ を示せ．（ヒント：$\boldsymbol{l}_1$ は L_1, L_2 が囲む有界領域 $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |\boldsymbol{u}| \leq 2\}$ の境界の向きと反対の向きを表すことに注意し問題 5 を使う）
   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$ をみたすとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}_1} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}_1 = \int_{\boldsymbol{l}_2} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}_2$ を示せ．
7. （教科書 p. 51 参照：「関数論」で当該箇所を学んだ後に考えてみてください）
   $z \in \mathbb{C}$ と関数 $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を実部と虚部に分け，$z = x + \sqrt{-1}\,y$, $h(z) = f(x, y) + \sqrt{-1}\,g(x, y)$ と書く．
   (1) $\boldsymbol{V} := \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{W} := \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}$ とおくとき，「h が正則関数 $\iff$ $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \mathrm{rot}\boldsymbol{W} = 0$」を示せ．
   (2) 曲線 $\boldsymbol{l} : [a, b] \to \mathbb{C}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} h(z)dz = \int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} + \sqrt{-1}\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{l}$ を示せ．

（提出の必要はありません）

幾何入門 レポート問題 6（2016 年 5 月 20 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} \cos x + \cos y \\ \sin x + \sin y \end{pmatrix}$ とおく． $(\mathrm{div}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) = 0$, $(\mathrm{rot}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) = 0$ をみたす $\boldsymbol{u}$ を全て求めよ.

（5/27 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html