

条件から得られる式が

$$\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin y \\ \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix}$$

と書けることに気づけば、 $x = y + \frac{\pi}{2} + 2n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) をみたす全ての  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  が答であることがわかります。

例えば  $\cos x \cdot \operatorname{div} \mathbf{V} + \sin x \cdot \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$  から  $\cos(x - y) = 0$  を導き、従って  $x - y = \frac{\pi}{2} + n\pi$  と結論づけるのは早計です。これは必要条件ですが十分条件ではありません。一方、 $(\operatorname{div} \mathbf{V})^2 + (\operatorname{rot} \mathbf{V})^2 = 0$  から  $\sin(x - y) = 1$  を導いた場合は、途中の式変形がすべて同値な変形になっていますから、正しい答が得られます。

$\operatorname{div} \mathbf{V}$  と  $\operatorname{rot} \mathbf{V}$  の計算に部分点を 1 点つけました。その後の三角関数の扱いがあまり芳しくないようです。大学入試の時にさんざん訓練したはずですが、しっかり思い出してください。