幾何入門 演習問題 7（2016 年 5 月 27 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ領域や曲線はすべて $\mathbb{R}^2$ 内のものとし，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. 領域 $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ を考える．
   (1) $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (2) $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m} : [0,\pi] \to \Omega$ を，それぞれ $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \boldsymbol{m}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ で定義する．$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ に沿った線積分を考えることにより，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる $f : \Omega \to \mathbb{R}$ は存在しないことを示せ．（定理 30 を使う）
   (3) Ω は単連結でないことを示せ．
2. 次の $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$（ポテンシャル）が存在するか調べよ．存在する場合は f を一つ求めよ．$\mathbb{R}^2$ が単連結であることは認めてよい．

$$(1)\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad (2)\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \qquad (3)\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x^3 - 2xy \\ -x^2 + y^4 \end{pmatrix} \qquad (4)\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \frac{1}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

（以下，今までの復習です）

3. $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{u} := (1,2,0), \boldsymbol{v} := (2,-1,1), \boldsymbol{w} := (0,1,3)$ が張る平行六面体の体積を求めよ．
4. $f, \varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とするとき

$$\mathrm{grad}(f \circ \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}(\varphi_1)(\boldsymbol{u}) & \mathrm{grad}(\varphi_2)(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix} \mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))$$

   を示せ．ただし，ベクトルはいずれも縦ベクトルで，右辺は行列とベクトルの積である．
5. $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し $\widetilde{\boldsymbol{V}} := A\boldsymbol{V}$ とおくとき，$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \mathrm{div}\widetilde{\boldsymbol{V}}$ であることを示せ．
6. 前問の行列 A と関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$, 曲線 $\boldsymbol{l} : [a,b] \to \Omega$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} (A\,\mathrm{grad}(f)) \cdot \boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l} = f(\boldsymbol{l}(b)) - f(\boldsymbol{l}(a))$ を示せ．
7. $L := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}| = 1,\ y \geq 0\} \cup \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1,\ y = 0\}$ とおき，L が囲む有界領域を Ω とする．
   (1) L を表す区分的正則パラメータ $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で，周期的かつ Ω の境界の向きを表すものを一つ与えよ．
   (2) (1) の $\boldsymbol{l}$ とベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} y(y-1) \\ 2xy \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}, \int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
8. 放物線 $y = x^2$ と直線 $x + y = 2$ で囲まれる有界領域を Ω とし，$L := \partial\Omega$ とおく．
   (1) L を表す区分的正則パラメータ $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で，周期的かつ Ω の境界の向きを表すものを一つ与えよ．
   (2) (1) の $\boldsymbol{l}$ とベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x - y^2 \\ x + 2y \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}, \int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
9. 周期 4π の閉曲線 $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を，$\boldsymbol{l}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 2\pi), \boldsymbol{l}(t) = \begin{pmatrix} -1 + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} (2\pi \leq t \leq 4\pi)$ となるように定める．$\boldsymbol{l}$ は区分的に滑らかな閉曲線ではないことを示せ．$\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1$ または $(x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$ とおくと，Ω を含む領域で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l} = \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{V}\,dxdy$ が成り立つことを示せ．
10. $i = 1, 2$ に対し，$L_i := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}| = i\}$ とおく．L_1 と L_2 で囲まれる有界領域 Ω を図示せよ．L_i の正則パラメータで，$\partial\Omega$ の向きを表すようなものを一つずつ求めよ．$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ について，Gauss の発散定理と Green の公式が成り立つことを確認せよ，（成り立たなければ，求めた正則パラメータの向きが正しくないことになる）
11. $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} \cos(t^3 - t) \\ \sin(t^3 - t) \end{pmatrix}$ が表す曲線 L を図示せよ．L は滑らかな閉曲線か？
12. $i = 1, 2$ に対し，L_i は区分的に滑らかな閉曲線で，L_i が囲む有界領域 Ω_i の境界の向きが入っているものとする．さらに $L_2 \subset \Omega_1^\circ$ であるとする．$\boldsymbol{l}_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を，それぞれの向きを表す区分的正則パラメータで周期的なものとする．
   (1) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{W}$ が $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$ と $\mathrm{rot}\boldsymbol{W} = 0$ をみたすとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}_1} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_1\,d\boldsymbol{l}_1 = \int_{\boldsymbol{l}_2} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_2\,d\boldsymbol{l}_2$ と $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}_1} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{l}_1 = \int_{\boldsymbol{l}_2} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{l}_2$ を示せ．（ヒント：5/20 の問題 5）
   (2) $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix}$ と，$\mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

13. 曲線の正則パラメータ $\boldsymbol{l} : [a,b] \to \Omega$ に対し，$\boldsymbol{u}(t) := \left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right|^{-2} \dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t), \boldsymbol{v}(t) := A\boldsymbol{u}(t)$（$A$ は問題 5 の行列）とおく．

(1) 各 $t \in [a,b]$ に対し，$\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)$ は一次独立であることを示せ．（ヒント：$a\boldsymbol{u}(t) + b\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{0}$ と仮定し，両辺と $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$ の内積を取る．$\boldsymbol{u}(t) \perp \boldsymbol{v}(t)$ を使う）

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{V} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ に対し，

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t)) = \left(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right)\boldsymbol{u}(t) + \left(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t)) \cdot \boldsymbol{n}(t)\left|\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right|\right)\boldsymbol{v}(t)$$

を示せ．このことから，線積分（その 1・その 2）とは，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t))$ を接線方向 $\boldsymbol{u}(t)$, 法線方向 $\boldsymbol{v}(t)$ に分解したときの各成分の係数を積分したものであることがわかる．

14. (1) $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ を曲線のパラメータとするとき，$\dfrac{d(\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{m})}{dt}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) \cdot \boldsymbol{m}(t) + \boldsymbol{l}(t) \cdot \dfrac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)$ を示せ．ただし関数 $\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $(\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{m})(t) := \boldsymbol{l}(t) \cdot \boldsymbol{m}(t)$ で定める．

(2) $\boldsymbol{u} \in \Omega$ において力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ を受けて運動する質量 m の物体 P を考える．時刻 t における P の位置を $\boldsymbol{p}(t)$ とすると，**運動方程式** $m\dfrac{d^2\boldsymbol{p}}{dt^2}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}(t))$ が成立する．$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}(f)$ であると仮定し，$E := \dfrac{1}{2}m\left|\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}(t)\right|^2 + f(\boldsymbol{p}(t))$ を P の**エネルギー**とよぶ．E は時刻 t によらず一定であることを示せ（ヒント：運動方程式を使って $\dfrac{dE}{dt} = 0$ を示す）．これを**エネルギー保存則**とよぶ．（**注**．エネルギー保存則が運動方程式から数学的に導かれる定理であること，またベクトル場 $\boldsymbol{F}$ のポテンシャルとは位置エネルギーであることがわかる．）

15.（定理 41 の証明で使います）一変数 C^∞ 級関数 f, g に対し $h(s) := \displaystyle\int_a^{f(s)} g(x)\,dx$ とする．$h'(s) = f'(s)g(s)$ を示せ．

（提出の必要はありません）

補足：曲線の連続変形について．詳細は「トポロジー」で学びます．ここでは概略だけ述べておきます．
一般に，曲線 $\boldsymbol{l} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ の**連続変形**（ホモトピー (homotopy) という）とは，連続写像 $\boldsymbol{h} : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{R}^2$ で，任意の $t \in [a,b]$ に対し $\boldsymbol{h}(0,t) = \boldsymbol{l}(t)$ となるようなものをいいます．$\boldsymbol{h}$ が連続とは，$\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ と書いたとき，h_1, h_2 がともに二変数の連続関数であることを指します．$\boldsymbol{l}_s(t) := \boldsymbol{h}(s,t)$ とおくと，各 $s \in [0,1]$ に対し $\boldsymbol{l}_s : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ は曲線で，s を動かすと，$\boldsymbol{l}_0 = \boldsymbol{l}$ から始まって「連続的に」$\boldsymbol{l}_1$ まで変形していくわけです．
$S^1 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}, D^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}| \leq 1\}$ とおけば $S^1 = \partial D^2$ です．以降，周期 T の閉曲線 $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は，

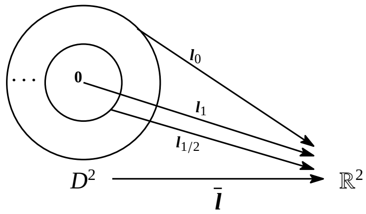
$$\widetilde{\boldsymbol{l}} : S^1 \to \mathbb{R}^2, \quad \widetilde{\boldsymbol{l}}(\cos\theta, \sin\theta) := \boldsymbol{l}(\theta T/2\pi)$$

と同一視することにより，$\boldsymbol{l} : S^1 \to \mathbb{R}^2$ とみなします（5/13 の問題 9 参照）．
閉曲線 $\boldsymbol{l} : S^1 \to \mathbb{R}^2$ が**連続変形で一点に縮む**とは，連続変形 $\boldsymbol{l}_s$ $(0 \leq s \leq 1)$ で $\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_0$ $(\forall \boldsymbol{x} \in S^1)$, つまり $\boldsymbol{l}_1$ が**定値写像**となるものが存在する，ということです．このとき，$\bar{\boldsymbol{l}} : D^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\bar{\boldsymbol{l}}(r\cos\theta, r\sin\theta) := \boldsymbol{l}_{1-r}(\cos\theta, \sin\theta)$$

で定めることができます．$r = 0$ においては偏角 θ が定まりませんが，$\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_0$ $(\forall \boldsymbol{x} \in S^1)$ であることから，$r = 0$ においては右辺を $\boldsymbol{u}_0$ で定めることで $\bar{\boldsymbol{l}}$ は $r = 0$ においても well-defined となり，連続であることがわかります．また $\boldsymbol{x} \in S^1$ $(r = 1)$ に対しては $\bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})$ です．つまり閉曲線 $\boldsymbol{l} : S^1 \to \mathbb{R}^2$ が一点に縮むとき，$\boldsymbol{l}$ を $\bar{\boldsymbol{l}} : D^2 \to \mathbb{R}^2$ に**拡張**できる（境界では元の $\boldsymbol{l}$ に一致するようにできる）ことがわかります．

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[d, "\cap"'] \arrow[dr, "\boldsymbol{l}"] & \\ D^2 \arrow[r, "\bar{\boldsymbol{l}}"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$



逆に，閉曲線 $\boldsymbol{l} : S^1 \to \mathbb{R}^2$ を $\bar{\boldsymbol{l}} : D^2 \to \mathbb{R}^2$ に拡張できるとき，$\boldsymbol{l}$ の連続変形 $\boldsymbol{l}_s : S^1 \to \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{l}_s(\boldsymbol{x}) := \bar{\boldsymbol{l}}((1-s)\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in S^1)$ で定義すれば，$\boldsymbol{l}_0(\boldsymbol{x}) = \bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{x}) = \bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{0})$（定値写像）となり，$\boldsymbol{l}$ は連続変形で一点に縮むことがわかります．
例えば $\mathbb{R}^2$ が単連結であることは，任意の閉曲線 $\boldsymbol{l} : S^1 \to \mathbb{R}^2$ に対し，$\widetilde{\boldsymbol{l}} : D^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\widetilde{\boldsymbol{l}}(r\cos\theta, r\sin\theta) := (1-r)\boldsymbol{l}(\theta)$（ベクトルのスカラー倍）で定義できることにより示されます．

問題 12 の解説が中途半端だった気がしたので，(2) について補足します．
定義通りに $\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, dl$ を計算することもできますが，少し大変です．$\boldsymbol{l}$ が表す向きのついた曲線（楕円）を L_1 とし，
$\boldsymbol{m}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ が表す向きのついた曲線（円）を L_2 とおきます（これらは**向きも込めて** (1) の L_1, L_2 に対応します）．
L_1 と L_2 に挟まれた領域を Ω とおくと，Gauss の発散定理により

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, dl = \int_{\Omega} \mathrm{div} \boldsymbol{V}\, dxdy \qquad (*)$$

が成り立ちます．左辺は L_1 に沿った線積分と L_2 に沿った線積分に分かれますが，**Ω の境界としての** L_2 の向きは

$$\overline{\boldsymbol{m}}(t) := \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

で表されるので，$(*)$ は

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_l\, dl + \int_{\overline{\boldsymbol{m}}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_{\overline{m}}\, dm = \int_{\Omega} \mathrm{div} \boldsymbol{V}\, dxdy \qquad (**)$$

となります．$\boldsymbol{n}_l$ や $\boldsymbol{n}_{\overline{m}}$ は，$\boldsymbol{l}$ や $\overline{\boldsymbol{m}}$ の法ベクトルです．$\boldsymbol{m}$ と $\overline{\boldsymbol{m}}$ は逆の向きを定めますから

$$\int_{\overline{\boldsymbol{m}}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_{\overline{m}}\, dm = -\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_m\, dm$$

（$\boldsymbol{n}_m$ は $\boldsymbol{m}$ の法ベクトル）となり，$(**)$ に代入すれば

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_l dl - \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_m\, dm = \int_{\Omega} \mathrm{div} \boldsymbol{V}\, dxdy$$

です．$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$ であることから

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_l\, dl = \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_m\, dm$$

を得ます．やってみるとわかりますが，左辺よりは右辺のほうがずっと計算が容易です．

幾何入門 レポート問題 7（2016 年 5 月 27 日）

担当：境 圭一

$L := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x/2)^2 + (y/3)^2 = 1\}$ とし，L が囲む有界領域を Ω とする．L を表す正則パラメータ $\boldsymbol{l}$ で，$\partial\Omega$ の向きを表すものを取る．$\Omega \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．（ヒント：$L' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \epsilon^2\} \subset \Omega^\circ$ となる $\epsilon > 0$ を一つ見つけ，L, L' で囲まれる有界領域 Ω' 上で Green の公式を使うと計算が容易になる．Ω' 上で $\boldsymbol{V}$ の分母が 0 にならないかの確認も必要．5/27 の問題 12 も参照）

（**6/3（金）10:00 まで**に，**研究室 (A403) 前のレポートボックスに**提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html