幾何入門 演習問題 8（2016 年 6 月 10 日）

担当：境 圭一

※今回からスペースの都合でベクトルを横に書きますが，もちろん縦でも構いません．

1. $S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ とし，$V_+, V_- \subset S^2$ を次のように定義する：
$$V_+ := \{(x,y,z) \in S^2 \mid -1 < z\}, \quad V_- := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z < 1\}.$$
   (1) $V_+ \cup V_- = S^2$ を示せ．
   (2) $\boldsymbol{\varphi}_+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を次のように定義する．$\boldsymbol{a} = (s,t) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\mathbb{R}^3$ の点 $(s,t,0)$ と $(0,0,-1) \in S^2$ を結ぶ直線が V_+ と交わる点を $\boldsymbol{\varphi}_+(\boldsymbol{a})$ と定める．$\boldsymbol{\varphi}_+(\boldsymbol{a})$ を s,t の式で表し，すべての $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ に対し $\boldsymbol{\varphi}_+(\boldsymbol{a}) \in V_+$ であることを示せ．従って $\boldsymbol{\varphi}_+ : \mathbb{R}^2 \to V_+$ とみなせる．
   (3) $\boldsymbol{\varphi}_+ : \mathbb{R}^2 \to V_+$ は全単射であることを示せ．また，Jacobi 行列 $D\boldsymbol{\varphi} = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s} \ \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\right)$ の階数は，任意の $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ において 2 であることを示せ．これにより，$\boldsymbol{\varphi}_+$ は各 $p \in V_+$ の近くでの S^2 の局所座標になることがわかる．
   (4) $\boldsymbol{a} = (s,t) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\mathbb{R}^3$ の点 $(s,t,0)$ と $(0,0,1) \in S^2$ を結ぶ直線が V_- と交わる点を $\boldsymbol{\varphi}_-(\boldsymbol{a})$ と定める．(2), (3) と同様にして，$\boldsymbol{\varphi}_- : \mathbb{R}^2 \to V_-$ は各 $p \in V_-$ の近くでの S^2 の局所座標になることを示せ．
   (5) $\boldsymbol{\varphi}_\pm$ の逆写像 $\boldsymbol{\varphi}_\pm^{-1} : V_\pm \to \mathbb{R}^2$ を具体的な式で表せ．

   注．この $\boldsymbol{\varphi}_\pm$ あるいは逆写像 $\boldsymbol{\varphi}_\pm^{-1}$ を**立体射影** (stereographic projection) とよぶ．
2. (1) S^2 上の任意の点は $(\cos\alpha\cos\beta,\ \sin\alpha\cos\beta,\ \sin\beta)$ $(0 \le \alpha \le 2\pi, -\dfrac{\pi}{2} \le \beta \le \dfrac{\pi}{2})$ の形に表せることを示せ．（ヒント：$\mathbb{R}^3$ の極座標）

   S^2 の部分集合
$$A := \{(x,0,z) \in S^2 \mid x \ge 0\}, \quad B := \{(x,y,0) \in S^2 \mid x < 0\}$$
   を考え，$V := S^2 \setminus A, W := S^2 \setminus B$ とおく．
   (2) $U := (0,2\pi) \times \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \alpha < 2\pi, -\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}\}$ とおく．$\boldsymbol{\varphi} : U \to V$ を $\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\beta) := (\cos\alpha\cos\beta,\ \sin\alpha\cos\beta,\ \sin\beta)$ で定義すると，$\boldsymbol{\varphi}$ は各 $p \in V$ の近くでの S^2 の局所座標になることを示せ．
   (3) $\boldsymbol{\psi} : U \to W$ を $\boldsymbol{\psi}(\alpha,\beta) := (\sin\alpha\cos\beta,\ \sin\beta,\ -\cos\alpha\cos\beta)$ で定義すると，$\boldsymbol{\psi}$ は各 $p \in W$ の近くでの S^2 の局所座標になることを示せ．
3. (1) $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^3\}$ とおく．S を図示せよ．
   (2) $\boldsymbol{0} \in S$ の近くで S の局所座標を取れないことを示せ．従って S は曲面ではない．（ヒント：$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{a} \in U$ に対し $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ を示す）
4. (1) $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2+y^2}\}$ とおく．S を図示せよ．
   (2) S は曲面ではないことを示せ．（ヒント：$\boldsymbol{0} \in S$ の近くで局所座標を取れないことを前問と同様に示す）
   (3) $S \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ は曲面であることを示せ．
5. $S \subset \mathbb{R}^3$ の各点 $p \in S$ の近くで S の局所座標を取れるとき，S の座標系が存在することを示せ．
6. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ を一次独立なベクトルとするとき，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ であることを示せ．また $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ は $\mathbb{R}^3$ の基底をなすことを示せ．（第 1 回目にやりましたが，次回以降使うので再掲しました）
7. $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ に対し $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$（ただし $0 \le \theta < 2\pi, r \ge 0$ とする）とおくとき，(r,θ,z) を**円柱座標**とよぶ．
   (1) 円柱座標で一意的に表せない $\mathbb{R}^3$ の点を全て求めよ．
   (2) 球面 S^2 を円柱座標で表せ．
   (3) 円柱座標で $r = 1$ で表される図形 A を図示せよ．また A を xyz 座標で表せ．
   (4) 円柱座標で $(r-2)^2 + z^2 = 1$ で表される図形 T を図示せよ．また T を xyz 座標で表せ．

（提出の必要はありません）

幾何入門 レポート問題 8（2016 年 6 月 10 日）

担当：境 圭一

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とし，そのグラフを $S := \{(s, t, f(s,t)) \in \mathbb{R}^3\}$ とする．$\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to S$ を $\boldsymbol{\varphi}(s,t) := (s, t, f(s,t))$ で定義するとき，$\boldsymbol{\varphi}$ は単射であることを示せ．また $D\boldsymbol{\varphi}$ は常に階数 2 であることを示せ.

（6/17 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html