幾何入門 演習問題 8（2016 年 6 月 17 日）

担当：境 圭一

1. 次の三変数 C^∞ 級関数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ に対し，$\mathrm{grad}(f)=\mathbf{0}$ となる点を全て求めよ．$S:=f^{-1}(0)$ とおくとき，$S\neq\emptyset$, かつ S 上で $\mathrm{grad}(f)\neq\mathbf{0}$ となるような（従って，S が曲面を表すような）定数 k の範囲を求めよ．そのときの S を図示せよ．また，それ以外の k に対しては，S はどのような図形になるか？
   (1) $f(x,y,z):=x^2+y^2-k$
   (2) $f(x,y,z):=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-k$（ただし $a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ は k と無関係な定数）
   (3) $f(x,y,z):=(x^2+y^2+z^2+k)^2-16(x^2+y^2)$
   (4) $f(x,y,z):=xy+z^2-k$
   (5) $f(x,y,z):=x^2+2y^2+kz^2+4zx+1$
   (6) $f(x,y,z):=(x^2+y^2+z^2-k)^2$
2. (1) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を C^∞ 級とし，$\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^3$ とする．$\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3, |\boldsymbol{v}|=1$ に対し，$\boldsymbol{u}$ における f の $\boldsymbol{v}$ 方向の**方向微分**を
$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(\boldsymbol{u}+\epsilon\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{u})}{\epsilon}\quad\cdots\quad(*)$$
で定義する．講義の補題 10 と同様にして，$(*)$ が $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})$ に等しいことを示せ.
   (2) $(*)$ が最大になるのは，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})=k\boldsymbol{v}$ となる $k>0$ が存在するときであることを示せ.
3. (1) $\boldsymbol{n}:=(a,b,c)\neq\mathbf{0}$ とする．平面 $H:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz+d=0\}$（ただし $d\in\mathbb{R}$ は定数）は $\boldsymbol{n}$ に直交する平面であることを示せ.
   (2) C^∞ 級関数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ が $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^3$ において $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})\neq\mathbf{0}$ をみたすとする．$\boldsymbol{u}$ を通り，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})$ に直交する平面 H を表す方程式を求めよ．この方程式と，$\boldsymbol{u}$ における f の Taylor 展開（の一次の項）を比較せよ.
4. 円柱座標 (r,θ,z) のもとで $T:=\{(r,\theta,z)\mid(r-2)^2+z^2=1\}$ と表されるトーラスを考える．$S^1:=\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}|=1\}$ 上の点 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ を $[\alpha]$ で表すことにする（従って，S^1 の点としては $[\alpha+2\pi]=[\alpha]$ である）．$F:S^1\times S^1\to T$ を
$$F([\alpha],[\beta]):=(2+\cos\alpha,\ \beta,\ \sin\alpha)$$
で定義すると F は well-defined な全単射であることを示せ.
5. 円柱座標 (r,θ,z) のもとで $r=2+t\cos(\theta/2)$, $z=t\sin(\theta/2)$ $(|t|\leq 1)$ で表される図形 M は**メビウスの帯** (Möbius band) であることを確かめよ.
6. 一般の二次形式 $f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2pxy+2qyz+2rzx$（ただし a,b,c,p,q,r は定数で，少なくとも一つは 0 でない）に対し，$S:=f^{-1}(1):=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=1\}$ が $\emptyset$ でない曲面を表すための条件を求めよ.（ヒント：$A:=\begin{pmatrix} a&p&r\\ p&b&q\\ r&q&c\end{pmatrix}$ とおくと A は対称行列で，$f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ である．A は直交行列で対角化できる．答は A の固有値の言葉で表現できる）
7. $S\subset\mathbb{R}^3$ を曲面とし，$\boldsymbol{\varphi}:U\to S$ を $p\in S$ の近くの局所座標とする.
   (1) $\boldsymbol{\varphi}:U\to\boldsymbol{\varphi}(U)$ とみると，$\boldsymbol{\varphi}$ は全単射であることを示せ.
   (2) $\mathbb{R}^2$ の開集合 $V\subset U$ で $p\in\boldsymbol{\varphi}(V)$ となるものに対し，（必要なら $\epsilon>0$ を小さく取り直せば）$\boldsymbol{\varphi}|_V:V\to S$ も p の近くの局所座標になることを示せ.
   (3) 開集合 $W\subset\mathbb{R}^2$ と，C^∞ 級の全単射 $\boldsymbol{\psi}:W\to U$ で Jacobi 行列が正則であるものが存在すると仮定する．$\boldsymbol{\varphi}\circ\boldsymbol{\psi}:W\to S$ も p の近くの局所座標になることを示せ.
   (4) 曲面の定義における局所座標として，いつでも $D^\circ\to S$ の形のものを取れることを示せ．ただし $D^\circ:=\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}|<1\}$ である.（ヒント：開集合 U に含まれる点は全て内点であることに注意し (2), (3) を使う）
   (5) 曲面の定義における局所座標として，いつでも $\mathbb{R}^2\to S$ の形のものを取れることを示せ.（ヒント：(3) のような $\boldsymbol{\psi}$ を $U=D^\circ$ と $W=\mathbb{R}^2$ に対し構成し (4) を使う）

（提出の必要はありません）

補足：曲面の局所座標について.

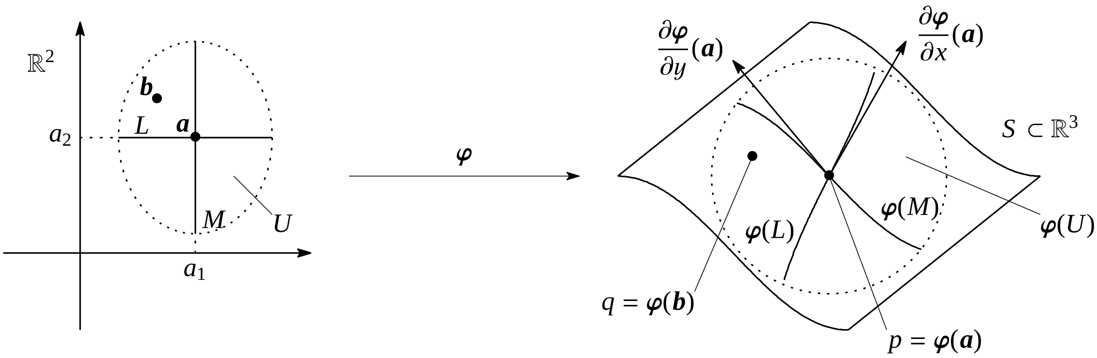
曲面の定義，すなわち，任意の $p \in S$ のまわりで取れる局所座標 $\boldsymbol{\varphi} : U \to S$ の意味はわかりにくいと思います．いろいろ言い換えるうちに意味がつかめてくる，ということもあると思うので，少し補足してみます．

$p \in S$ とします．S が曲面であるとは，p のまわりの局所座標が取れる，ということでした．その定義に出てくる ϵ と $\boldsymbol{\varphi} : U \to S$ の性質 (i), (ii) は次のようなことを意味します（あくまで気分であり，数学的に厳密ではありません）：

(i) $\boldsymbol{\varphi}(U) \subset S$ であり，S 上で p に近い点は全て $\boldsymbol{\varphi}(U)$ に含まれる（二年生後期の「位相空間論」では「$\boldsymbol{\varphi}(U)$ は S における p の近傍である」という言い方をします）

(ii) $\boldsymbol{\varphi}$ を通して $U \subset \mathbb{R}^2$ と $\boldsymbol{\varphi}(U)$ $(\subset S \subset \mathbb{R}^3)$ は同一視される（位相空間論では「U と $\boldsymbol{\varphi}(U)$ は同相」といいます）

(i), (ii) より，$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}) = p$ となる $\boldsymbol{a} \in U$ が**唯一つ**存在します．$U \subset \mathbb{R}^2$ ですから，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ のように，$\boldsymbol{a}$ の位置は 2 つの実数の組（座標）により確定します．(ii) により U と $\boldsymbol{\varphi}(U)$ は同一視されるので，p の S 上での位置も，2 つの実数の組 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ で確定していると言えます．同じように，S 上で p に近い点 q $(\in \boldsymbol{\varphi}(U))$ に対しても，$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{b}) = q$ となる $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in U$ が**唯一つ**存在し，q の S 上の位置は座標 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ で確定していると言えます．このように，S が曲面であるとき，任意の $p \in S$ の近くで，平面のような「座標」が $\boldsymbol{\varphi}$ を通して定まることになります（ただし，この「座標」を S 全体で定めるのは一般には無理です）.



上の $\boldsymbol{a}$ を通る，U 上の二つの直線

$$L := \{(x, a_2) \in U\}, \quad M := \{(a_1, y) \in U\}$$

を考えます．L, M はそれぞれ x 軸，y 軸に平行な直線です．$\boldsymbol{\varphi}$ により，L, M は $\boldsymbol{\varphi}(U)$ $(\subset S)$ 上の曲線 $\boldsymbol{\varphi}(L), \boldsymbol{\varphi}(M)$ にうつされます．これらは曲がってはいますが（S が曲がっているから），もとの L, M は U の座標軸に平行でしたから，$\boldsymbol{\varphi}(L), \boldsymbol{\varphi}(M)$ も「座標軸」のようになっているものと期待されます．局所座標の条件 (iii) はこのことに関係します：

簡単のため $\boldsymbol{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおき，L, M のパラメータ

$$\boldsymbol{l}(t) := \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{m}(t) := \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}_2$$

を選んでおきます．$\boldsymbol{l}(0) = \boldsymbol{m}(0) = \boldsymbol{a}$ です．このとき

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e}_1) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})\Big) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big((\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{l})(h) - (\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{l})(0)\Big)$$

と書けますから，$\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}(\boldsymbol{a})$ は S 内の曲線 $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{l}$ の（つまり，$\boldsymbol{\varphi}(L)$ の）p における接ベクトルであることがわかります．同様に $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}(\boldsymbol{a})$ は p における $\boldsymbol{\varphi}(M)$ の接ベクトルです．局所座標の条件 (iii) は，これらが一次独立であることでした．それはすなわち，$\boldsymbol{\varphi}(L)$ と $\boldsymbol{\varphi}(M)$ の接ベクトルが p において平行にはなっていないこと，つまり「座標軸」$\boldsymbol{\varphi}(L), \boldsymbol{\varphi}(M)$ が接したりせず，「横断的に」交わることを意味します（直交はしていないかもしれません）.

別の言い換えとして，局所座標は**正則曲線**のパラメータ $\boldsymbol{l}$ の 2 次元版ともいえます．$\boldsymbol{l}$ も条件 (i), (ii) に対応する性質をみたしますし，$\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt} \neq \boldsymbol{0}$ という条件は，2×1 行列 $\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}$ の階数が 1 である，とも言い換えられ，(iii) に対応することがわかります．$\boldsymbol{l}$ の像が曲線全体だったのに対し，局所座標 $\boldsymbol{\varphi}$ の像は一般に S 全体とはならないのが相違点です.

幾何入門 レポート問題 9（2016 年 6 月 17 日）

担当：境 圭一

k を定数とし，$f(x,y,z) := x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 8y - 6kz$ とする．$S := f^{-1}(-4k^2 + 3k - 11)$ が曲面となるような k の範囲を求めよ．

（6/24 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html