幾何入門 レポート 9（2016 年 6 月 17 日）コメント

担当：境 圭一

講義でやった定理 54 の主張は

(1) $S \neq \emptyset$, かつ
(2) S 上 $\mathrm{grad}(f) \neq \mathbf{0}$

ならば S は曲面である，というものです．この問題の場合 (1) と (2) の両方をみたす k は $1 < k < 2$ ですから，定理 54 の帰結は「$1 < k < 2 \implies S$ は曲面」です．定理 54 は，**$k \leq 1$ や $2 \leq k$ のときについては何も述べていない**，ということに注意してください．このときは定理 54 を使うのでなく，個別に調べる必要があります．

- $k < 1, 2 < k$ のときは $S = \emptyset$ ですから，S は曲面ではありません．
- $k = 1, 2$ のとき，$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = -4k^2 + 3k - 11\}$ を書き換えると

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 + 3(z-k)^2 = 0\},$$

つまり $S = \{(1, 2, k)\}$ は**一点集合なので**曲面ではありません．

特に後者についての考察が不十分でした．S 上に $\mathrm{grad}(f) = \mathbf{0}$ となる点があるから，というのは S が曲面にならない理由にはなりません．S 上に $\mathrm{grad}(f) = \mathbf{0}$ となる点があったとしても，S が曲面になることはあり得ます．例えば 6/17 の問題 1. (6) の $k > 0$ の場合はその例でした．
もう一つ多かった誤りとして

(×) $k \neq 1, 2$ のとき $\mathrm{grad}(f) \neq \mathbf{0}$

というものがありました．k の値が何であれ，この問題の場合は $\mathrm{grad}(f)(1, 2, k) = \mathbf{0}$ です．正しくは

(○) $k \neq 1, 2$ のとき，**S 上で** $\mathrm{grad}(f) \neq \mathbf{0}$

です．
もう一つ，集合論の勉強が不足しているのか，

(×) $S = (x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 3(z-k)^2 + (k-1)(k-2)$

という誤りも見られました．集合と実数が等号で結ばれることはあり得ません．

(○) $S = \{(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 3(z-k)^2 + (k-1)(k-2)\}$

は，省略した書き方ではありますが，許容されると思います．

(6/24)

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html