**補足：逆写像定理，陰関数定理について**．まだ聞いたことがない人が多数だったようなので補足します．解析の教科書には必ず載っていますから，詳細はそちらをご覧ください．

**1. 逆写像定理について**．まず一変数 $C^\infty$ 級関数 $y = f(x)$ について考えます．一般に $f$ の逆関数，つまり $y = f(x) \iff x = g(y)$ をみたす $g$ は存在しません．例えば $f(x) = x^2$ であるとき，$g(1)$ として $\pm 1$ のどちらを取るのかが確定しません．しかし，$f' \neq 0$ をみたす点の近くでは，「局所的には」逆関数が存在します；$f'(x_0) \neq 0$ と仮定すると，$x = x_0$ を含む（狭い）区間 $(a, b)$ で $f$ は（狭い意味で）単調に増大または減少します．ここでは $f'(x_0) > 0$ の場合を考えます．このときグラフを書くとわかるように（下図参照），$y_0 := f(x_0)$ を含む区間 $(c, d) = (f(a), f(b))$ に限れば，$f$ の逆関数 $g : (c, d) \to (a, b)$ が存在します ($f(x) = x^2$ なら $g(y) = \sqrt{y}$). **逆関数定理**は，この $g$ が $C^\infty$ 級であることを主張します．一般には次のようなことが成り立ちます：

**定理**（逆写像定理）．$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$f = (f_1, \dots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ を $C^\infty$ 級の写像とする．$\boldsymbol{x}_0 \in U$ における $f$ の Jacobi 行列 $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ が正則であるとき，$\boldsymbol{x}_0$ を含む開集合 $U' \subset U$ と，$\boldsymbol{y}_0 := f(\boldsymbol{x}_0)$ を含む開集合 $V \subset f(U)$ が存在して，$V$ 上で定義された $f$ の逆写像 $g : V \to U'$ が存在し $C^\infty$ 級である．

$n = 1$ の場合，Jacobi 行列とは $f'(x_0)$ のことで，それが正則であるとは，$f'(x_0) \neq 0$ に他なりません．

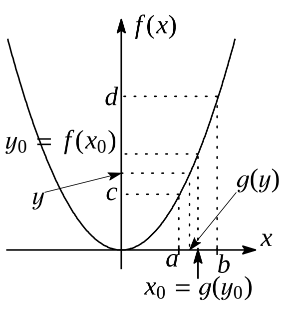
**2. 陰関数定理について**．$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を二変数 $C^\infty$ 級関数とします．$a \in \mathbb{R}$ に対し $h^{-1}(a) := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid h(\boldsymbol{u}) = a\}$ は，$h$ の形や $a$ の値によりますが，しばしば曲線を表します．例えば $h(\boldsymbol{u}) = |\boldsymbol{u}|^2$ のとき，$h^{-1}(1)$ は $\mathbb{R}^2$ 内の単位円です．この曲線上の点 $(x, y)$ に対し，$x, y$ は互いに無関係には変化できず，$x^2 + y^2 = 1$ という関係をみたさなければなりません．$x, y$ の関係は，曲線全体については $y = F(x)$ とか $x = G(y)$ のような関数の形ではありませんが（「陰関数」という言葉は，このような状況を指します），ある狭い区間に限れば，その上では明示的な関係を与える関数が存在し，実は $C^\infty$ 級です．例えば $(\pm 1, 0)$ を含まない連結区間 $A$ に限れば，その区間は関数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ または $y = -\sqrt{1 - x^2}$ のグラフ（の一部）です．また $(\pm 1, 0)$ を含む区間であっても，それは $x = \sqrt{1 - y^2}$ または $x = -\sqrt{1 - y^2}$ のグラフ（の一部）です（一般には，具体的に求まるとは限りません）．同様のことを一般的に主張するのが**陰関数定理**です．

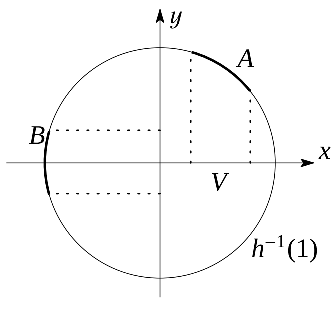
**定理**（陰関数定理）．$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$f : U \to \mathbb{R}$ を $C^\infty$ 級関数とする．$p = (p_1, \dots, p_n) \in U$ において，ある $i$ に対し $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) \neq 0$ となるとき，$(p_1, \overset{\wedge}{\underset{i}{\cdots}}, p_n)$ を含む開集合 $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ と，$C^\infty$ 級関数 $g : V \to \mathbb{R}$ が存在して次をみたす：

$$g(p_1, \overset{\wedge}{\underset{i}{\cdots}}, p_n) = p_i, \qquad f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(x_1, \overset{\wedge}{\underset{i}{\cdots}}, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n) = 0 \quad ((x_1, \overset{\wedge}{\underset{i}{\cdots}}, x_n) \in V).$$

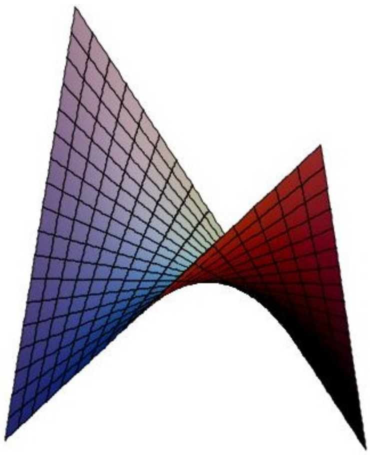
ただし，$(p_1, \overset{\wedge}{\underset{i}{\cdots}}, p_n)$ は $(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n)$ を意味します．

区間 $A$ が $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ のグラフとみなせたのは $A$ 上 $\dfrac{\partial h}{\partial y} \neq 0$ だからです；各 $p \in A$ に対し $h(p) = 1$ と $\dfrac{\partial h}{\partial y}(p) \neq 0$ より，$p$ を $y$ 軸方向に少しずらした点 $q$ に対し $h(q) \neq 1$ です．よって $p$ の上下すぐ近くには $h^{-1}(1)$ の点はありません．結果として $x$ に対し $y$ がただ一つ定まり，$A$ は $x$ の関数 $y = F(x)$ $(= \pm\sqrt{1 - x^2})$ のグラフとみなせるわけです．
区間 $B$ 上では $\dfrac{\partial h}{\partial y}(-1, 0) = 0$ となるため，同じ議論は成り立ちません．しかし $B$ 上では代わりに $\dfrac{\partial h}{\partial x} \neq 0$ なので，$x$ と $y$ の役割を入れ替えた議論が成り立ち，$B$ は $y$ の関数 $x = G(y)$ $(= \pm\sqrt{1 - y^2})$ のグラフとして表せます．

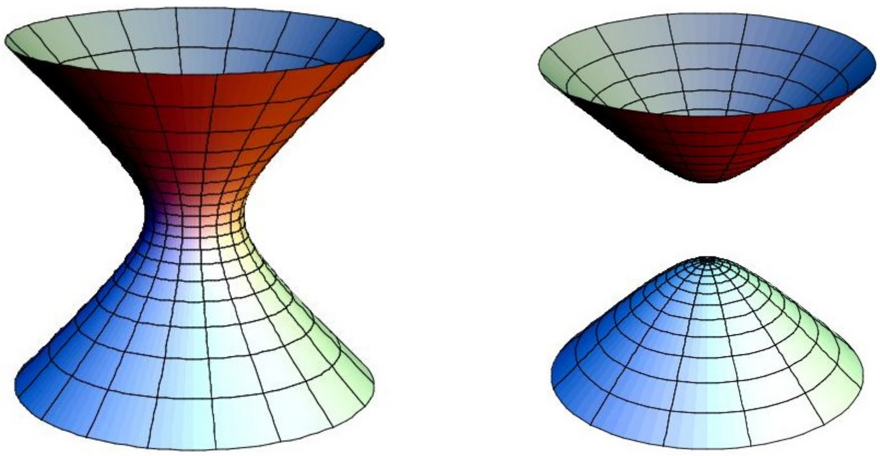


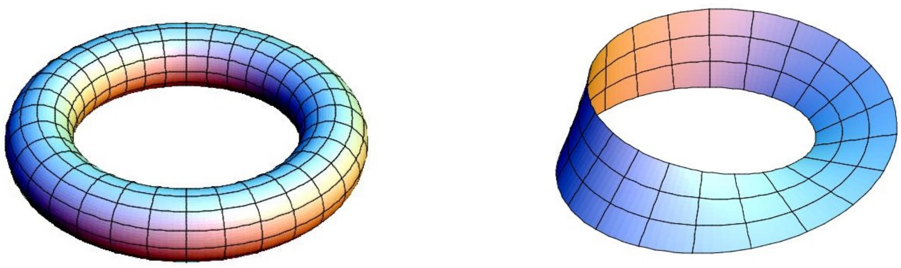
**●いくつかの曲面の例**



$z = xy$ のグラフ



一葉双曲面，二葉双曲面



トーラス，Möbius の帯