幾何入門 演習問題 10（2016 年 6 月 24 日）

担当：境 圭一

1. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を $f(x,y,z):=xy+z^2-1$ で定義し，$S:=f^{-1}(0)$ とおく．
   (1) $\mathrm{grad}(f)(p)=\mathbf{0}$ となる $p\in\mathbb{R}^3$ を全て求めよ．
   (2) (1) で求めた p は S 上にないことを示せ．このことから S は曲面であることを示せ．
   (3) $p=(a,b,c)\in S$ に対し，T_pS と $T_p^{\perp}S$ を表す方程式をそれぞれ求めよ．
   (4) T_pS を，$\mathbf{0}\in T_pS$ が p に移るように平行移動して得られる平面を表す方程式を求めよ．
   (5) S の概形を図示せよ．（ヒント：平面 $z=k$ で切った切り口を考えるとよい）
   (6) 上と同様のことを，以下の関数について考えよ．
      (i) $f(x,y,z):=y^2+(z-1)^2-2$
      (ii) $f(x,y,z):=2x-3y+4z-5$
      (iii) $f(x,y,z):=x^2+y^2-z^2+1$
      (iv) $f(x,y,z):=x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}-1$
2. $V_z^+:=\{(x,y,z)\in S^2\mid z>0\}$ 上の点 p の近くの局所座標として，$\boldsymbol{\varphi}:D^\circ\to V_z^+,\ \boldsymbol{\varphi}(s,t):=(s,t,\sqrt{1-s^2-t^2})$ を考える．ただし $D^\circ:=\{(s,t)\in\mathbb{R}^2\mid s^2+t^2<1\}$ とする．
   (1) $\partial_s\boldsymbol{\varphi}:=\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial s}$ などと略記する．$\partial_s\boldsymbol{\varphi},\partial_t\boldsymbol{\varphi}$ を計算せよ．
   (2) $p=(a,b,c)\in V_z^+$ とする．$\boldsymbol{\varphi}(s,t)=p$ となる $(s,t)\in D^\circ$ を求めよ．
   (3) (1), (2) を使って T_pS^2 を表す方程式を求めよ．また，$\mathbf{0}\in T_pS^2$ が p に移るよう T_pS^2 を平行移動して得られる平面の方程式を求めよ．
   (4) $\partial_s\boldsymbol{\varphi}\times\partial_t\boldsymbol{\varphi}$ を計算せよ．
   (5) $\boldsymbol{n}:V_z^+\to\mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}(p):=\dfrac{(\partial_s\boldsymbol{\varphi}\times\partial_t\boldsymbol{\varphi})(s,t)}{|(\partial_s\boldsymbol{\varphi}\times\partial_t\boldsymbol{\varphi})(s,t)|}$ で定義する．ただし $p\in V_z^+$ に対し，$\boldsymbol{\varphi}(s,t)=p$ となる $(s,t)\in D^\circ$ を選んでいる．$\boldsymbol{n}$ は V_z^+ 上の連続な単位法ベクトル場であることを示せ．
   (6) $\boldsymbol{\psi}:D^\circ\to V_z^+$ を，$\boldsymbol{\psi}(s,t):=(t,s,\sqrt{1-s^2-t^2})$ で定義し，$\widetilde{\boldsymbol{n}}:V_z^+\to\mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}$ の定義中の $\boldsymbol{\varphi}$ を $\boldsymbol{\psi}$ で置き換えることにより定義する．$\widetilde{\boldsymbol{n}}$ は $\boldsymbol{n}$ と逆の向きを定める，即ち $\widetilde{\boldsymbol{n}}=-\boldsymbol{n}$ が成り立つことを示せ．
3. 円柱座標 (r,θ,z) で $\{(r,\theta,z)\mid(r-2)^2+z^2=1\}$ で表されるトーラスを T とおく．$\boldsymbol{\varphi}:U:=(0,2\pi)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ を，$\mathbb{R}^3$ の xyz 座標で $\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\beta):=((2+\cos\alpha)\cos\beta,\ (2+\cos\alpha)\sin\beta,\ \sin\alpha)$ で定義する．
   (1) $\boldsymbol{\varphi}(U)\subset T$ であることを示せ．
   (2) $\boldsymbol{\varphi}$ は単射であること，$D\boldsymbol{\varphi}$ は常に階数 2 であることを示せ．
   (3) $p=(a,b,c)\in\boldsymbol{\varphi}(U)$ に対し，T_pT と $T_p^{\perp}T$ をそれぞれ求めよ．
   (4) $f(x,y,z):=(x^2+y^2+z^2+3)^3-16(x^2+y^2)$ に対し $T=f^{-1}(0)$ であること（6/17 の講義，演習を参照のこと）を用いて，$p\in T$ に対し T_pT と $T_p^{\perp}T$ をそれぞれ求めよ．
4. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ は C^∞ 級で，$S:=f^{-1}(0)$ 上 $\mathrm{grad}(f)\neq\mathbf{0}$ であるとする．S は向き付け可能な曲面であることを示せ．
5. $\boldsymbol{\varphi}:(-1,1)\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{\varphi}(t,\theta):=((2+t\cos(\theta/2))\cos\theta,\ (2+t\cos(\theta/2)\sin\theta,\ t\sin(\theta/2))$ で定義し，その像を $M:=\boldsymbol{\varphi}((-1,1)\times[0,2\pi])$ とおく．
   (1) M を図示し，M はメビウスの帯であることを確かめよ．
   (2) $U:=(-1,1)\times(0,2\pi)$ に対し，$\boldsymbol{\varphi}:U\to M$ は単射で，$D\boldsymbol{\varphi}$ の階数は常に 2 であることを示せ．
   (3) $p=\boldsymbol{\varphi}(t,\theta)$ ($(t,\theta)\in U$) に対し $\boldsymbol{n}(p):=\dfrac{(\partial_t\boldsymbol{\varphi}\times\partial_\theta\boldsymbol{\varphi})(t,\theta)}{|(\partial_t\boldsymbol{\varphi}\times\partial_\theta\boldsymbol{\varphi})(t,\theta)|}$ とおくと，2. (4), (5) と同様に $\boldsymbol{n}(p)\in T_p^{\perp}M$ である．$\displaystyle\lim_{\theta\downarrow 0}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(0,\theta))$ と $\displaystyle\lim_{\theta\uparrow 2\pi}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(0,\theta))$ を比べよ．このことから M は向き付け可能ではないことを示せ．
6. （難）向き付け可能な曲面 S に対しては，連続写像 $\boldsymbol{n}:S\to\mathbb{R}^3$ で，$\boldsymbol{n}(p)\in T_p^{\perp}S,\ |\boldsymbol{n}(p)|=1$ ($\forall p\in S$) をみたすものが定まった．では，連続写像 $\boldsymbol{u}:S\to\mathbb{R}^3$ で，$\boldsymbol{u}(p)\in T_pS,\ |\boldsymbol{u}(p)|=1$ ($\forall p\in S$) をみたすものは定まるか？ S がトーラスの場合，このような $\boldsymbol{u}$ を一つ見つけよ．S が 2 次元球面 S^2 の場合はどうか？

（提出の必要はありません）

幾何入門 レポート問題 10（2016 年 6 月 24 日）

担当：境 圭一

$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 + 2z^2 = -1\}$ 上の点 $p = (a, b, c)$ における接平面 T_pS が $\boldsymbol{u} := (1, -2, 2)$ と直交するとき, a, b, c を求めよ.

（7/1 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html