幾何入門 演習問題 11（2016 年 7 月 1 日）

担当：境 圭一

1. $S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ の向きが，$\boldsymbol{n} : S^2 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{n}(p) = p$ で与えられているとする．$V_z^+ := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$ 上の点 p のまわりの局所座標として，$\boldsymbol{\varphi} : D^\circ \to V_z^+$, $\boldsymbol{\varphi}(s, t) := (s, t, \sqrt{1 - s^2 - t^2})$ を考える．ただし $D^\circ := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 < 1\}$ とする．
   (1) $\partial_s \boldsymbol{\varphi} := \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}$ などと略記する．$\hat{\boldsymbol{n}} := \partial_s \boldsymbol{\varphi} \times \partial_t \boldsymbol{\varphi}$ を計算し，$\boldsymbol{\varphi}$ は向きを保つ局所座標であることを示せ．つまり，任意の $\boldsymbol{a} \in D^\circ$ に対し $p = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})$ とおくと，$\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a}) = k\boldsymbol{n}(p)$ となる $k > 0$ が存在することを示せ．
   (2) $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z) := (x, y, z)$ に対し，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s, t))$ を求めよ．
   (3) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s, t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(s, t)$ を求めよ．
   (4) $\boldsymbol{\varphi}(D^\circ) = V_z^+$ であることを示せ．
   (5) $\displaystyle\int_{V_z^+} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} := \int_{D^\circ} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s, t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(s, t)\, dsdt$ を計算せよ．
   (6) $\boldsymbol{\varphi}' : D^\circ \to V_z^+$ を，$\boldsymbol{\varphi}'(s, t) := (t, s, \sqrt{1 - s^2 - t^2})$ で定義する．$\boldsymbol{\varphi}'$ は向きを保つ局所座標ではないことを示せ．
   (7) $\hat{\boldsymbol{n}}' := \partial_s \boldsymbol{\varphi}' \times \partial_t \boldsymbol{\varphi}'$ とおく．$\displaystyle\int_{D^\circ} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}'(s, t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}'(s, t)\, dsdt$ を計算し (4) と比較せよ（問題 5 も参照）．
2. S^2 の向き $\boldsymbol{n} : S^2 \to \mathbb{R}^3$ は問題 1 と同じとする．$V_+ := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > -1\}$ とおき，各 $p \in V_+$ のまわりの局所座標 $\boldsymbol{\psi} : \mathbb{R}^2 \to V_+$ として $\boldsymbol{\psi}(s, t) := \dfrac{(2s,\ 2t,\ 1 - s^2 - t^2)}{1 + s^2 + t^2}$ を考える（演習 8 (6/10) の立体射影）．
   (1) $\boldsymbol{\psi}$ は向きを保つ局所座標であることを示せ．
   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z) := (x, y, z)$ に対し，$\displaystyle\int_{V_+} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
   (3) $\boldsymbol{\psi}(D^\circ)$ は問題 1 の V_z^+ に一致することを示せ．$\boldsymbol{\psi} : D^\circ \to V_Z^+$ を使って $\displaystyle\int_{V_z^+} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算し，1. (5) と比較せよ．
3. C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を**スカラー場**とも呼ぶ．向きづけられた曲面 S に対し，$p \in S$ のまわりの向きを保つ局所座標 $\boldsymbol{\varphi} : U \to S$ を取って，スカラー場 f の $A := \boldsymbol{\varphi}(U)$ に沿った**面積分**を次のように定義する：
$$\int_A f\, dS := \int_U f(\boldsymbol{\varphi}(s, t))\, |\hat{\boldsymbol{n}}(s, t)|\, dsdt.$$
   (1) $\displaystyle\int_A f\, dS$ は向きを保つ局所座標 $\boldsymbol{\varphi}$ の取り方によらないことを示せ．
   (2) 定数関数 1 に対し，$\displaystyle\int_A 1\, dS$ を A の**面積**と呼ぶ．問題 2 の $\boldsymbol{\psi} : \mathbb{R}^2 \to V_+$ に対し，$\displaystyle\int_{V_+} 1\, dS$ を計算せよ．
4. S^2 の局所座標として，演習 8 (6/10) 問題 2 の局所座標 $\boldsymbol{\varphi} : U \to V$ を取る．問題 1 の $\boldsymbol{V}$ に対し $\displaystyle\int_V \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．また V の面積（問題 3 参照）を求めよ．
5. $(S, \boldsymbol{n})$ を向き付けられた曲面とする．$p \in S$ のまわりの局所座標 $\boldsymbol{\varphi} : U \to S$ と $\boldsymbol{\varphi}' : U' \to S$ で，$\boldsymbol{\varphi}$ は向きを保ち，$\boldsymbol{\varphi}'$ は向きを保たず，$\boldsymbol{\varphi}(U) = \boldsymbol{\varphi}'(U') \subset S$ をみたすものをとる．このとき $\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し次を示せ：
$$\int_U \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s, t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(s, t)\, dsdt = -\int_{U'} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}'(s, t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}'(s, t)\, dsdt$$
6. トーラス S の局所座標として，演習 10 (6/24) 問題 3 の $\boldsymbol{\varphi} : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ を取る．
   (1) S の向き $\boldsymbol{n} : S \to \mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}$ が S で囲まれる有界領域から非有界領域に向かうよう定義する．$\boldsymbol{\varphi}$ は向きを保つ局所座標か？（ヒント：例えば $\boldsymbol{\varphi}(\pi, \pi)$ における $\boldsymbol{n}$ の向きを見れば十分）
   (2) $\boldsymbol{V}(x, y, z) := (y, -x, z)$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{\varphi}(U)} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
   (3) $\boldsymbol{\varphi}(U)$ の面積（問題 3 参照）を計算せよ．
7. 一般に，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ と $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ に対し，$(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) \times (c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}) = (ad - bc)\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ であることを示せ．これを使って補題 76 の証明を完成させよ．

（提出の必要はありません）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html

補足：局所座標が向きを保つか否かの判定について．

$(S, \boldsymbol{n})$ を向きづけられた曲面とし，$\boldsymbol{\varphi} : U \to S$ を $p \in S$ のまわりの局所座標とします．任意の $\boldsymbol{a} \in U$ に対し

$$\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a}) = k\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})) \quad (\in T^{\perp}_{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})}S) \tag{$*$}$$

（ただし $\hat{\boldsymbol{n}} := \partial_s\boldsymbol{\varphi} \times \partial_t\boldsymbol{\varphi} : U \to \mathbb{R}^3$）となる $k \neq 0$ が存在します（その値は一般に $\boldsymbol{a}$ によって変化するので，本当は $k = k(\boldsymbol{a})$ と書くべき）．**任意の $\boldsymbol{a} \in U$ に対し** $k > 0$ であるとき，$\boldsymbol{\varphi}$ は**向きを保つ局所座標**である，といいました．$\hat{\boldsymbol{n}}$ を「$\boldsymbol{\varphi}$ が決める $\boldsymbol{\varphi}(U)$ 上の向き」と呼ぶことにすると，元々与えられた向き $\boldsymbol{n}$ と，$\boldsymbol{\varphi}$ が決める $\boldsymbol{\varphi}(U)$ 上の向きが一致するとき，$\boldsymbol{\varphi}$ は向きを保つ，というわけです．

$\boldsymbol{\varphi}$ が向きを保つか否かは，**任意の $\boldsymbol{a} \in U$** について，$(*)$ をみたす k が正であることを示す必要があります．しかし実際には次のことが言えます：

補題．**ある一つの $\boldsymbol{a} \in U$** について $(*)$ をみたす k が正なら，$\boldsymbol{\varphi}$ は向きを保つ局所座標である．

証明．$\hat{\boldsymbol{n}} := \begin{pmatrix} \hat{n}_1 \\ \hat{n}_2 \\ \hat{n}_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{n} \circ \boldsymbol{\varphi} := \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ とおくと，$\hat{n}_i$ や n_j $(i, j = 1, 2, 3)$ はいずれも二変数の連続関数です．任意の $\boldsymbol{a} \in U$ に対し $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})) \neq \boldsymbol{0}$ ですから，少なくとも一つの $i \in \{1, 2, 3\}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ の近くで $n_i \neq 0$ です．この i について，$\boldsymbol{a}$ の近くで $k = \dfrac{\hat{n}_i}{n_i}$ が成り立つので，k は任意の $\boldsymbol{a}$ の近くで（従って U 全体で）連続です．しかも $k \neq 0$ ですから，k の符号は U 上で一定です（連続関数が符号を変える瞬間には必ず 0 を通る）．よって，ある一つの $\boldsymbol{a} \in U$ に対し $k(\boldsymbol{a}) > 0$ なら，U 全体で $k > 0$ です． □

$k(\boldsymbol{a})$ の正負を調べるとき，$\boldsymbol{a}$ はどれでもよいわけですが，計算しやすいものを選ぶとよいと思います．例えば 7/1 の問 1. (1) の場合，$\boldsymbol{a} = (s, t) = \boldsymbol{0}$ において $\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a})$ と $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}))$ を比べると簡単です．

幾何入門 レポート問題 11（2016 年 7 月 1 日）

担当：境 圭一

7/1 の問題 1 の状況で，$\boldsymbol{W}(x, y, z) := (y, -x, z)$ に対し，$\displaystyle\int_{V_z^+} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ.

（7/8 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html