## 幾何入門 演習問題 12（2016 年 7 月 8 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ とする．閉曲面 $S$（$S^2$ も含む）の向きは，$S$ が囲む有界領域の内側から外側に向かう法ベクトルで与えられるものとする．

1. $C^\infty$ 級関数 $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対し，次の等式を示せ．（演習 6 (5/20) 1. (2), (5) 参照）
   (1) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \Delta f$, ただし $\Delta f := \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
   (2) $\mathrm{div}(g \cdot \mathrm{grad}(f)) = \mathrm{grad}(f) \cdot \mathrm{grad}(g) + g\Delta f$
2. $\boldsymbol{V}(x, y, z) := \left(x^2 + 3xy^2,\ -y^3 + y(2 - z),\ \dfrac{z^2}{2} - 2zx\right)$ に対し，Gauss の発散定理を用いて $\displaystyle\int_{S^2} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
3. (1) $\boldsymbol{V}(x, y, z) := (x, y, z)$ に対し，Gauss の発散定理を使って，$\displaystyle\int_{S^2} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
   (2) 以下の $S^2$ の局所座標が向きを保つことを示せ．その上での $\boldsymbol{V}$ の面積分（の和）を計算せよ．$S^2$ 上で，それぞれの局所座標で覆われない部分はどこか？ただし $D^\circ := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 < 1\}$ である．
      (i) $\boldsymbol{\varphi}_\pm : D^\circ \to S^2$, $\boldsymbol{\varphi}_\pm(s, t) := (\pm s,\ t,\ \pm\sqrt{1 - s^2 - t^2})$
      (ii) $\boldsymbol{\psi} : \mathbb{R}^2 \to S^2$, $\boldsymbol{\psi}(s, t) := \dfrac{1}{1 + s^2 + t^2}(2s,\ 2t,\ -1 + s^2 + t^2)$
4. （教科書の例題 2.29 参照）$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x/2)^2 + (y/3)^2 + (z/4)^2 = 1\}$ とし，$E$ が囲む有界領域を $\Omega$ とする．
   (1) $E$ は閉曲面であることを示せ．（ヒント：$\mathbb{R}^3$ の閉集合であることは例 21 と同様）
   (2) $E$ の向きを表す $\boldsymbol{n} : E \to \mathbb{R}^3$ を求めよ．（ヒント：補題 60 を使う．一般に $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ のとき $\dfrac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}$ は単位ベクトルである．符号を決めるには，例えば $\boldsymbol{n}(2, 0, 0) = (1, 0, 0)$ であるべきことに注意するとよい）
   (3) $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とおき，$\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z) := \dfrac{(x, y, z)}{r^3}$ を考える．$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (4) $S^2 \subset \Omega$ であることを示せ．$E$ と $S^2$ で囲まれた有界領域 $\Omega'$ に対し Gauss の発散定理を使って，$\displaystyle\int_E \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を $S^2$ 上の面積分を使って表わせ．（$S^2$ の向きに注意せよ）
   (5) $S^2$ 上 $r = 1$ であることを使って，$\displaystyle\int_E \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
5. $S \subset \mathbb{R}^3$ は閉曲面で，$S$ が囲む有界領域 $\Omega$ は原点を内部に含むとする．$S$ の向きは，$\Omega$ の内側から外側に向かう法ベクトルで与えられるとする．このとき，問題 4 のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
6. 講義の例 83 の計算を正当化しよう．$0 < \epsilon < 1$ に対し $U_\epsilon := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - \epsilon < |\boldsymbol{u}| < 1 + \epsilon\}$ とおく．
   (1) $U_\epsilon$ を図示せよ．$\boldsymbol{\varphi}_\epsilon : U_\epsilon \to \mathbb{R}^3$ を，$(r\cos\theta, r\sin\theta) \in U_\epsilon$ に対し

$$\boldsymbol{\varphi}_\epsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) := (\cos(1 - r)\cos\theta,\ \cos(1 - r)\sin\theta,\ \sin(1 - r))$$

   で定める．$\boldsymbol{\varphi}_\epsilon$ は向きに適合した $S^2$ の局所座標で，$\boldsymbol{\varphi}_\epsilon(U_\epsilon)$ は「赤道」$\{(x, y, 0) \in S^2\}$ を覆うことを示せ．
   (2) $\displaystyle\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{\boldsymbol{\varphi}_\epsilon(U_\epsilon)} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} \to 0$ を示せ．“$\displaystyle\lim_{\epsilon\downarrow 0} \boldsymbol{\varphi}_\epsilon(U_\epsilon)$” はどんな集合か考えよ．
7. $S_1, \ldots, S_k \subset \mathbb{R}^3$ は互いに交わらない閉曲面で，有界領域 $\Omega$ を囲むものとする．各 $S_i$ の向きは，$\Omega$ の内側から外側に向かう法ベクトルで与えられるとする．
   (1) 問題 1. (2) と Gauss の発散定理を使って，$C^\infty$ 級関数 $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対し

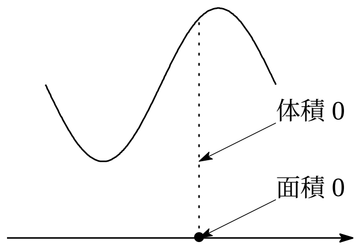
$$\sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} (g \cdot \mathrm{grad}(f)) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_\Omega (\mathrm{grad}(f) \cdot \mathrm{grad}(g) + g\Delta f)\, dxdydz$$

   を示せ．（これも Green の公式と呼ぶ）
   (2) $C^\infty$ 級関数 $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は $\Omega$ 上で $\Delta f_1 = \Delta f_2$ をみたし，さらに各 $S_i$ 上で $f_1 = f_2$ であるとする．このとき $\Omega$ 上で $f_1 = f_2$ であることを示せ．（ヒント：(1) で $f = g = f_1 - f_2$ の場合を考えよ）

（提出の必要はありません）

**補足：曲面全体に沿った面積分の計算について．**
$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ は，講義でやった定理 79 のように $S$ の局所座標系を取って計算するのが本来のやり方ですが，実際は例 83 のように「面積 0」の部分を除いて曲面を覆う局所座標を取って計算しても正しい答が得られます．しかも後者の方が簡単な場合が多いようです．

後者のようなやり方でも正しい答が得られる理由や，そもそも「面積 0」とはどういう意味か，ということは，この講義では残念ながら時間の制約のため述べられませんが，「面積 0」の領域が積分の値に影響しないことは，例えば領域 $\Omega$ 上の二変数関数 $z = f(x, y)$ の積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x, y)\, dxdy$ が，グラフと $\Omega$ で挟まれる領域の体積であったことを思い出すと，ある程度納得しやすいでしょう．「体積 = 底面積 × 高さ」ですから，底面積 0 の領域上の部分は「体積 0」で，この部分を取り除いても $\displaystyle\int_\Omega f(x, y)\, dxdy$ は変化しません．




「面積 0」「体積 0」の正確な意味については「実解析学」で学ぶことになります．

**幾何入門 レポート問題 12（2016 年 7 月 8 日）**

担当：境 圭一

$S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ の向きを $\boldsymbol{n}(p) := p$ で与える．$\boldsymbol{V}(x, y, z) := (z^2 x,\ yz^2,\ xy)$ に対し，$\displaystyle\int_{S^2} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．

（7/15 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html