幾何入門 演習問題 13（2016 年 7 月 15 日）

担当：境 圭一

1. (1) C^∞ 級関数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ に対し，$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f))=\mathbf{0}$ を示せ．
   (2) $\mathbb{R}^3$ 上の C^∞ 級ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{V})=0$ を示せ．
2. 次のベクトル場 $\boldsymbol{V}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ について，$\boldsymbol{V}=\mathrm{grad}(f)$ となる C^∞ 級関数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ は存在するか．
   (1) $\boldsymbol{V}(x,y,z)=(y+z,\ z+x,\ x+y)$
   (2) $\boldsymbol{V}(x,y,z)=(y^2+z^2,\ z^2+x^2,\ x^2+y^2)$
3. $S:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0\}$ とおく．
   (1) S は境界つき曲面であることを示せ．∂S を求めよ．（例 90 を参照せよ）
   (2) $p\in\partial S$ のまわりの局所座標を一つ求め，それに対し $\boldsymbol{n}_1(p)\in T_pS$ を求めよ．
   (3) S の向き $\boldsymbol{n}:S\to\mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}(p):=p\ (\forall p\in S)$ で定める．$\boldsymbol{n}$ が誘導する ∂S の向きを求めよ．
   (4) (3) の向きについて，$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z):=(-y+z,z+x,z)$ に対し，$\displaystyle\int_{\partial S}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (5) (4) の $\boldsymbol{V}$ に対し $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を求めよ．$D^2:=\{(s,t)\in\mathbb{R}^2\mid s^2+t^2\leq 1\}$ と $\boldsymbol{\varphi}:D^2\to S,\ \boldsymbol{\varphi}(s,t):=(s,t,\sqrt{1-s^2-t^2})$ に対し，$\displaystyle\int_{D^2}\mathrm{rot}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s,t))\cdot\hat{\boldsymbol{n}}(s,t)\,dsdt$ を計算し (3) と比較せよ．
4. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を $f(x,y,z):=z+x^2+y^2-1$ で定義し，$S:=f^{-1}(0)\cap\{z\geq 0\}$ とおく．
   (1) S は境界つき曲面であることを示せ．∂S を求めよ．
   (2) S の向き $\boldsymbol{n}:S\to\mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{n}(p):=\dfrac{\mathrm{grad}(f)(p)}{|\mathrm{grad}(f)(p)|}$ で定義する（補題 60 参照）．$\boldsymbol{n}$ が ∂S に誘導する向きを求めよ．
   (3) 前問 (4) の $\boldsymbol{V}$ に対し，$\displaystyle\int_S\mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
5. 向き付けられた境界つき曲面 $(S,\boldsymbol{n}),(S',\boldsymbol{n}')$ は $\partial S=\partial S'$ をみたし，さらに $p\in\partial S=\partial S'$ に対し $\boldsymbol{n}(p)=\boldsymbol{n}'(p)$ をみたすとする．このとき $\displaystyle\int_S\mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}=\pm\int_{S'}\mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ であることを示せ．符号はどのように定まるか？
6. 閉曲面 S と $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\displaystyle\int_S\mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}=0$ を示せ．（ヒント：S は境界を持たない）
7. $S:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2=1,\ |z|\leq 1\}$ は $\partial S=\{(x,y,\pm 1)\in S\}$ であるような境界つき曲面であり，$\boldsymbol{n}(1,0,0)=(1,0,0)$ となるような S の向きが ∂S に誘導する向きは $\boldsymbol{l}_\pm(t):=(\cos(\mp t),\sin(\mp t),\pm 1)$ で表されることを示せ．
8. Stokes の定理における「コンパクト」（$\mathbb{R}^3$ の有界閉集合であること）という条件は必要である．ここでは有界性が必要であることを確かめよう．$S:=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3\mid y\geq 0\}$ とする．
   (1) S は $\mathbb{R}^3$ の閉集合だが，有界でないことを示せ．
   (2) $\mathbb{H}^2:=\{(s,t)\in\mathbb{R}^2\mid t\geq 0\}$ を**上半平面**とよぶ．$\boldsymbol{\varphi}:\mathbb{H}^2\to\mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{\varphi}(s,t):=(s,t,0)$ は，各 $p\in S$ の近くの局所座標であることを示せ．また $\partial S=\{(x,0,0)\in S\}$ であることを示せ．
   (3) S の向きを，$\boldsymbol{n}(p):=(0,0,1)\ (\forall p\in S)$ となる法ベクトルで定める．このとき，(2) の座標は向きを保つことを示せ．また，$\boldsymbol{l}:\mathbb{R}\to\partial S,\ \boldsymbol{l}(t):=(t,0,0)$ は $\boldsymbol{n}$ から誘導される ∂S の向きを表すことを示せ．
   (4) $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z):=(e^{-x^2},\ x,\ 0)$ に対し，$\displaystyle\int_{\partial S}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．“$\displaystyle\int_S\mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$” は有限か？
9. $S\subset\mathbb{R}^3$ を曲面とし（境界はあってもなくてもよい），$\boldsymbol{\varphi}:U\to S$ を局所座標とする．$\boldsymbol{\varphi}(U)$ 上の曲線 $\boldsymbol{l}:(-\epsilon,\epsilon)\to\boldsymbol{\varphi}(U)$ が与えられたとき，U 上の曲線 $\boldsymbol{m}:(-\epsilon,\epsilon)\to U$ を $\boldsymbol{m}:=\boldsymbol{\varphi}^{-1}\circ\boldsymbol{l}$ で定義する．
   (1) $\boldsymbol{m}(t)=\begin{pmatrix}m_1(t)\\ m_2(t)\end{pmatrix}$ と書く．$\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)$ を $m_1'(t),m_2'(t)$ と $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial s}(\boldsymbol{m}(t)),\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\boldsymbol{m}(t))$ を用いて表わせ．（7/22 の講義で使います）
   (2) $p=\boldsymbol{l}(0)$ とおく．$\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(0)\in T_pS$ であることを示せ．
10. 形式的に $\nabla:=(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z})$ とおくとき，次の形式的な「等式」を示せ．
   (1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\mathrm{div}\boldsymbol{V}$
   (2) C^∞ 級関数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ に対し，$(\nabla\cdot\nabla)f=\Delta f$（演習 12. 1 参照）

（提出の必要はありません）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html

補足：境界に導かれる向き（定義 92）について.

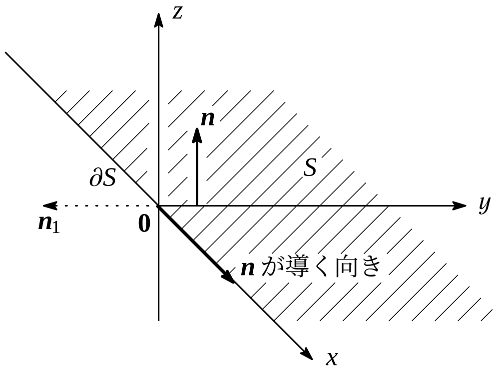
また向きに関してややこしい話が出てきて辟易しますが，Stokes の定理を定理 95 の形で成り立たせるためには，向きのついた曲面 $(S,\boldsymbol{n})$ に対して，∂S の向きを正しく定めないといけません．それが定義 92 の「$\boldsymbol{n}$ が ∂S に導く向き」です．定義 92 と同じ内容を，次のようにも言い換えられます（各自確かめてください）：

$(S,\boldsymbol{n})$ を向きづけられた境界つき曲面とし，$p\in\partial S$ のまわりの局所座標 $\boldsymbol{\varphi}:W\to\mathbb{R}^3$ で**向きを保つ**ものを取ります．$U:=W\cap\mathbb{H}^2$ とおくとき $\boldsymbol{\varphi}(U)\subset S$ で，$\forall\boldsymbol{a}\in U$ に対し

$$(\partial_s\boldsymbol{\varphi}\times\partial_t\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{a})=k\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}))$$

をみたす定数 k が存在します．$\boldsymbol{\varphi}$ が向きを保つとは，任意の $\boldsymbol{a}\in U$ に対し $k>0$ となるということです．$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})=p$ となる $\boldsymbol{a}\in U$ を取るとき，$p\in\partial S$ であることから，$\boldsymbol{a}=(s_0,0)\in\partial\mathbb{H}^2$ という形です．十分小さい $\epsilon>0$ に対し，$\boldsymbol{l}:(-\epsilon,\epsilon)\to\partial S$ を $\boldsymbol{l}(t):=\boldsymbol{\varphi}(t-s_0,\,0,\,0)$ とおけば，$\boldsymbol{l}$ は $\boldsymbol{n}$ が導く ∂S の向きを表します．
さらに言い換えると，$\boldsymbol{n}$ が導く ∂S の向きとは，上のような座標について $\partial_s\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})$ の方向である，とも言えます．

特別な場合として，$S:=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3\mid y\geq 0\}$ について考えましょう（下図参照）．平面 $z=0$ を xy 平面とみなし，その中に含まれる上半平面を S としたわけです．境界 ∂S は x 軸です．向きを $\boldsymbol{n}(p):=(0,0,1)$ $(\forall p\in S)$, つまり z 座標の正の方向と定めたとき，$\boldsymbol{n}$ が ∂S に導く向きは，x 軸の正の方向です．



7/15 の問題 9. (2), (3) あたりも参照してください．

より平たく，次のようにも言えます：$\boldsymbol{n}$ が指し示す向きが「上」になるように ∂S 上に立つことを想像してください．
$\boldsymbol{n}$ が導く向きに沿って ∂S 上を歩くと，左手側に曲面が見えます．右手側は曲面が途絶えています．
2 次元の場合に出てきた「領域の境界としての曲線の向き」との共通点に気づくでしょうか．

向きは数学の至るところで問題を引き起こすもので，避けては通れない問題です．「幾何入門」の場合は，積分の値の正負を決めるためにどうしても必要なものです．

幾何入門 レポート問題 13（2016 年 7 月 15 日）

担当：境 圭一

$S := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$ とし，S の向きは $\boldsymbol{n}(p) = p$ $(\forall p \in S)$ で与えられるとする．$\boldsymbol{V}(x, y, z) := (ye^z, -xe^z, z)$ に対し，$\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．

（7/22 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html