# 幾何入門 演習問題 14（2016 年 7 月 22 日）

担当：境 圭一

※今までの復習と補足です

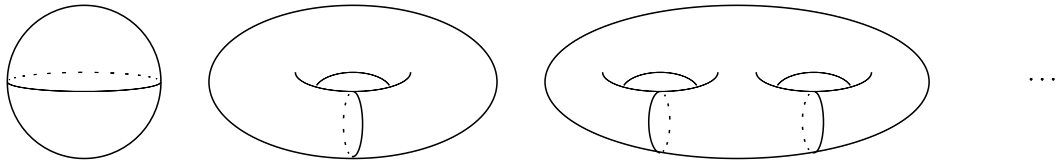
1. (1) $C^\infty$ 級関数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ に対し，$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))=\Delta f$, $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f))=\mathbf{0}$ を示せ．
   (2) $C^\infty$ 級ベクトル場 $\boldsymbol{V}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ に対し，$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{V})=0$ を示せ．
2. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を二変数 $C^\infty$ 級関数とし，$S:=\{(s,t,f(s,t))\in\mathbb{R}^3\mid s,t\in\mathbb{R}\}$ を $f$ のグラフとする．
   (1) $\boldsymbol{\varphi}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\varphi}(s,t):=(s,t,f(s,t))$ は $S$ の $(0,0,f(0,0))$ のまわりの局所座標であることを示せ．
   (2) $\boldsymbol{\psi}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\psi}(s,t):=(s^3,t,f(s^3,t))$ は $S$ の $(0,0,f(0,0))$ のまわりの局所座標か？
3. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を三変数 $C^\infty$ 級関数とし，$S:=f^{-1}(0)$ は $\emptyset$ でないとする．$S$ 上 $\mathrm{grad}(f)\neq\mathbf{0}$ のとき，曲面 $S$ は向きづけ可能であることを示せ．また，$S$ の向き $\boldsymbol{n}:S\to\mathbb{R}^3$ を一つ求めよ．
4. $S:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+(y/2)^2+(z/3)^2=1\}$ とおく．
   (1) $S$ は向きづけ可能な曲面であることを示し，$S$ の概形を図示せよ．
   (2) 各 $p\in S$ に対し，$T_pS$ ならびに $T_p^\perp S$ を表す方程式を求めよ．また $T_pS$ を平行移動して，実際に $p$ において $S$ に接する平面の方程式を求めよ．
   (3) $S$ の向き $\boldsymbol{n}:S\to\mathbb{R}^3$ で，$\boldsymbol{n}(1,0,0)=(1,0,0)$ をみたすものを求めよ．
   (4) $\boldsymbol{V}(x,y,z):=(x^3+xyz-xy^2,\ y-y^2z+y^3,\ (yz^2/2)-3zx^2-y^2z)$ に対し，$\displaystyle\int_S\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．ただし $S$ の向きは (3) のものとする．
   (5) $\boldsymbol{W}(x,y,z):=\dfrac{(x,\ y-1,\ z)}{(x^2+(y-1)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ に対し，$\displaystyle\int_S\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．ただし $S$ の向きは (3) のものとする．
5. $f(x,y,z):=x^2+(y-1)^2-(z+2)^2-1$ とおく．
   (1) $S:=f^{-1}(0)$ は向きづけ可能な曲面であることを示し，$S$ の概形を図示せよ．
   (2) $p=(a,b,c)\in S$ とする．$T_pS$ ならびに $T_p^\perp S$ を表す方程式を求めよ．
   (3) $S':=S\cap\{-3\le z\le -1\}$ とおく．$S'$ は境界つき曲面であることを示せ．
   (4) $\boldsymbol{n}(1,1,-2)=(1,0,0)$ となる $S$ の向きが $\partial S'$ に導く向きを求めよ．
   (5) $\boldsymbol{V}(x,y,z):=(1-y,x,z)$ と $\boldsymbol{W}(x,y,z):=((1-y)(z+2),x\sin(\frac{\pi z}{2}),z^2)$ に対し，$\displaystyle\int_{S'}\mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ と $\displaystyle\int_{S'}\mathrm{rot}\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
6. $\Omega:=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\in\mathbb{R}^3\}$ とおき，$\Omega$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z):=\dfrac{(-y,x,0)}{x^2+y^2}$ を考える．
   (1) $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (2) $\boldsymbol{l}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{l}(t):=(\cos t,\sin t,0)$ でパラメータづけされる閉曲線に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (3) $\Omega$ は単連結ではないことを示せ．（ヒント：講義でやった定理 98 を使う）
7. （やや難，教科書の §3.3 参照）$\boldsymbol{m}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{m}(t):=(\cos t,\sin t,0)$ で定義し，$\Omega:=\mathbb{R}^3\setminus\boldsymbol{m}(\mathbb{R})$ とおく．
   (1) 一般に，ベクトル場 $\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$ に対し，$\mathrm{rot}(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})=(\mathrm{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{V}-(\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{grad}(W_i))_{i=1}^3$ を示せ．
   (2) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u};t):=\dfrac{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{m}(t)}{|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{m}(t)|^3}$ は $t$ に依存する $\Omega$ 上のベクトル場である．$t\in\mathbb{R}$ を固定するとき，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (3) 一般に，$t\in\mathbb{R}$ に依存するベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u};t):=(V_i(\boldsymbol{u};t))_{i=1}^3$ に対し，$\displaystyle\int_a^b\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u};t)\,dt:=\Big(\int_a^b V_i(\boldsymbol{u};t)\,dt\Big)_{i=1}^3$ は 3 次元ベクトル場である．$\Omega$ 上のベクトル場 $\displaystyle\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}):=\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{m}(t)}{|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{m}(t)|^3}\times\frac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)\,dt$ に対し，$\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$ を求めよ．
   (4) $n\in\mathbb{N}$ に対し，周期 1 の滑らかな閉曲線 $\boldsymbol{l}_n(t)$ を，$|t|\le\dfrac{1}{4}$ のとき $\boldsymbol{l}_n(t)=(0,0,4nt)$, また $\dfrac{1}{4}\le t\le\dfrac{3}{4}$ のとき $|\boldsymbol{l}_n(t)|\ge 4n$ をみたすように選ぶ．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\boldsymbol{l}_n}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}_n$ を計算せよ．
   (5) $\Omega$ は単連結ではないことを示せ．

（提出の必要はありません）

**補足：向きづけ可能な境界つきコンパクト曲面の分類**

講義で主に扱った球面とか双曲面（の一部）の他にも曲面はいろいろあります．実は 19 世紀中には，曲面の分類は（ある意味では）完了しています．ここでは向きづけ可能な場合だけリストアップしてみます．

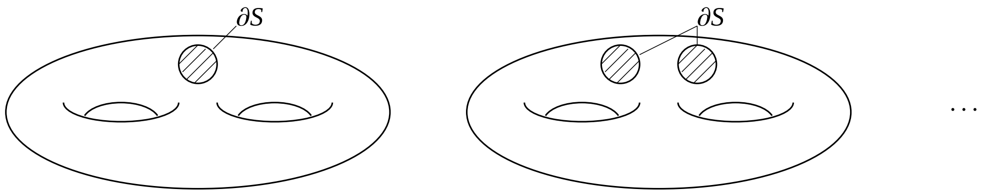
まず $\partial S = \emptyset$ の場合は，$S$ は閉曲面であり，以下に図示する $\Sigma_g$ $(g = 0, 1, \ldots)$ のいずれかになります：



$\Sigma_0 = S^2$ $\Sigma_1 = T$ $\Sigma_2$

$g$ は**種数** (genus) と呼ばれます．$g \geq 3$ の場合の $\Sigma_g$ の絵も類推されると思います．

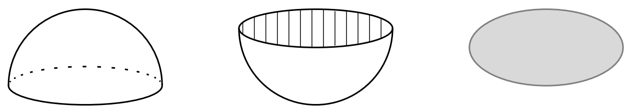
$\partial S \neq \emptyset$ の場合は，上の絵から「小円板」をいくつかくりぬいたものになります．例えば $\Sigma_2$ から「小円板」をくりぬいて得られる境界つき曲面は以下のいずれかになります：




$\Sigma_{2,1}$ $\Sigma_{2,2}$

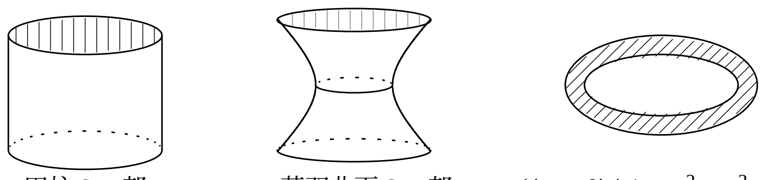
$\Sigma_{g,k}$ $(g, k \geq 0)$ の絵も類推されると思います．$\partial\Sigma_{g,k}$ は $k$ 個の円周からなります．向きづけ可能曲面がこのようなものに限る，というのは，例えば**ホモロジー論**の応用として得られる結果です．

「いずれかになる」ということの正確な意味は，全ての向きづけ可能コンパクト曲面は $\Sigma_{g,k}$ $(\exists g, k \geq 0)$ のいずれかに**同相**である，ということです．用語の意味は**位相空間論**で学びます．同じ $\Sigma_{g,k}$ であっても，$\mathbb{R}^3$ の部分集合として実現する方法は様々です．**多様体論**の言葉を使うと，$g, k$ を一つ固定したとき，**埋め込み** $\Sigma_{g,k} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ は複数ある，ということです．例えば次の絵は，$\Sigma_{0,1}$ を $\mathbb{R}^3$ の部分集合としていろいろな方法で実現したものです：



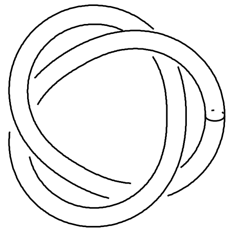
$S^2 \cap \{z \geq 0\}$ $S^2 \cap \{z \leq 0\}$ $\{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

また次の絵は，$\Sigma_{0,2}$ を $\mathbb{R}^3$ の部分集合としていろいろな方法で実現したものです：



円柱の一部 一葉双曲面の一部 $\{(x, y, 0) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

他にも，例えばトーラス $\Sigma_1$ を $\mathbb{R}^3$ の部分集合として次のように実現することもできます：



**幾何入門 レポート問題 14（2016 年 7 月 22 日）**

担当：境 圭一

$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ は単連結でないことを示せ．（ヒント：7/22 の問 6 参照）

※ **7/28（木）17:00** までに研究室 (A403) のレポートボックスに提出してください．レポート 13, 14 とも，採点が終わり次第，研究室前で返却します．

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html`