幾何入門 レポート 14（2016 年 7 月 22 日）コメント

担当：境 圭一

Ω は，z 軸に半径 1 の円板の分だけ「太さ」をつけたものを $\mathbb{R}^3$ から取り除いて得られる領域です．もし Ω が単連結だと仮定すれば，講義でやった定理 98 から，Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ について

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0} \iff \textbf{任意の}\text{閉曲線 } L \subset \text{ に対し} \int_L \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \quad \cdots \quad (*)$$

でした．さて，7/22 の問 6 にあるベクトル場 $\boldsymbol{V}$ は Ω 上でも定義され，直接計算により $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$ ($\in \mathbb{R}^3$) がわかります．一方，例えば $\boldsymbol{l}(t) := (\cos t, \sin t, 0)$ ($\in \Omega$) に対して $\int_l \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} = 2\pi$ で，これは 0 ではありません．これは $(*)$ に反します．従って，Ω が単連結であるという仮定が間違っていたことになります．
$(*)$ の「任意の」というところは重要です．ある一つの閉曲線に対し積分が 0 になる，ということとは全く意味が異なります．

Stokes の定理が主張することは

$$\text{向きづけ可能コンパクト曲面 } S \text{ に沿った } \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \text{ の積分} \quad = \quad \partial S \text{ に沿った } \boldsymbol{V} \text{ の積分}$$

です．この問題にはコンパクト曲面は登場していませんから，表立って Stokes の定理を使うわけではありません（使うのは講義の定理 98 で，その証明には Stokes の定理が使われています）.「Stokes の定理より」と書いている誤答案の多くは，Stokes の定理を正しく把握できていないものと思われます．試験まで残り少ない時間ですが，何とか理解してください．

なお Stokes の定理により，$\boldsymbol{l}(t) := (\cos t, \sin t, 0)$ に対し $\int_L \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} \neq 0$ というのは，この $\boldsymbol{l}$ を境界に持つ向きづけ可能なコンパクト曲面 S が Ω の中には存在しない，ということを意味します．実際に S を作ろうとしても，z 軸が邪魔で作れないことが，絵を描いてみればすぐに納得できると思います．しかしそれは S の非存在の証明としては不十分です（もっと頑張れば見つかるかもしれない，と言われたら反論できない）．積分によらない証明は，見た目の明らかさとは裏腹に，決して簡単ではないように思われます．
このように「何かが存在しない」ということを証明するのは容易でないことが多く，そのようなとき，上の積分のような量がしばしば決め手になります．この積分は**不変量**と呼ばれるものの一種で，この手の不変量には，このあといろいろな場面で出会うことになると思います．

(7/28)

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html