特に断らなければ $\boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とし，関数やベクトル場は全て C^∞ 級のものとする．ベクトルは縦横のどちらで書いても差し支えない．$\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で表される向きのついた曲線に対し，$\boldsymbol{l}(t)$ における単位法ベクトルを $\boldsymbol{n}(t)$ で表すものとする．

1. (1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算せよ．また，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が張る平行六面体の体積を求めよ．

   (2) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(\boldsymbol{u}) := \log(1 + |\boldsymbol{u}|^2)$ に対し，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ を全て求めよ．

   (3) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} xy^2 - 4xy + 4x - y \\ x^2y - 2xy + 2x + y \end{pmatrix}$ に対し，$(\mathrm{div}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) = 0$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ を全て求めよ．

   (4) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対し，$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(g))$ を計算せよ．計算過程も分かるようにせよ．

   (5) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ とベクトル場 $\boldsymbol{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対し，$\mathrm{div}(h\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}(h) \cdot \boldsymbol{V} + h\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ を示せ．

2. $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 3x^2 - y \\ -3y^2 - x \end{pmatrix}, \boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 3x^2 - y \\ -3y^2 + x \end{pmatrix}$ を考える．

   (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V}, \mathrm{rot}\boldsymbol{V}, \mathrm{div}\boldsymbol{W}, \mathrm{rot}\boldsymbol{W}$ を求めよ．（答のみでよい）

   (2) 関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ で $\mathrm{grad}(f) = \boldsymbol{V}$ をみたすものは存在するか？存在するならば f を一つ求め，存在しないならばそのことを証明せよ．

   (3) 曲線のパラメータ $\boldsymbol{l} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{m} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{m}(t) := \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し，$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ と $\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{m}$ を計算せよ．

   (4) (3) の $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ に対し，$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{l}$ と $\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{m}$ を計算せよ．

   (5) 関数 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ で $\mathrm{grad}(g) = \boldsymbol{W}$ をみたすものは存在するか？存在するならば g を一つ求め，存在しないならばそのことを証明せよ．

3. 直線 $x + y = 1$ と x 軸，y 軸で囲まれる有界領域を Ω とし，$L := \partial\Omega$ とおく．

   (1) L を表す区分的に正則なパラメータ $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で，周期的かつ Ω の境界の向きを表すものを一つ与えよ．

   (2) (1) で求めた $\boldsymbol{l}$ と，ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := e^{x^2-y^2}\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ に対し，$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．ただし (1) の $\boldsymbol{l}$ の周期を T とするとき，$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ の積分区間は $[0, T]$ である．

   (3) (1) で求めた $\boldsymbol{l}$ と，ベクトル場 $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x^7 + x^6y - 3x^5y^2 + x^4y^3 - 5x^3y^4 - 6x^2y^5 - x \\ y - 3x^5y^2 + 5x^4y^3 - x^3y^4 + 3x^2y^5 + 2xy^6 + 7y^7 \end{pmatrix}$ に対し，$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n}\, dl$ を計算せよ．積分区間については (2) と同様である．

4. $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ とし，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{4x^2 + y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ を Ω 上のベクトル場とする．

   (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V}, \mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を求めよ．計算過程も分かるようにせよ．

   (2) 周期的な正則パラメータ $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \Omega$ で表される曲線 $L = \boldsymbol{l}(\mathbb{R})$ が

$$L \cap \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y = 0\} = \{\boldsymbol{l}(0)\}, \qquad \frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   をみたし，$\boldsymbol{l}$ が囲む領域の境界の向きを表すとする．$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を求めよ．

配点：15, 15, 12, 8 (**1**: $3 \times 5 = 15$,　**2**: $3 \times 5 = 15$,　**3**: $4 \times 3 = 12$,　**4**: $5 + 3 = 8$)