幾何入門 中間試験（2016 年 6 月 3 日）解答例

担当：境 圭一

1. (1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}6\\-3\\-3\end{pmatrix}$. 平行六面体の体積は，$\left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{pmatrix}\right| = |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}| = 30$.

   (2) $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \dfrac{2\boldsymbol{u}}{1+|\boldsymbol{u}|^2}$ だから，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ とすると $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$.

   (3) $(\mathrm{div}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) = (y-2)^2+(x-1)^2$ だから，$(\mathrm{div}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) = 0$ とすると $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

   (4) $\partial_x g := \dfrac{\partial g}{\partial x}$ などと略記する．$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(g)) = \mathrm{rot}\begin{pmatrix}\partial_x g\\ \partial_y g\end{pmatrix} = \partial_x(\partial_y g) - \partial_y(\partial_x g)$. g は C^∞ 級だから $\partial_x(\partial_y g) = \partial_y(\partial_x g)$. よって $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(g)) = 0$.

   (5) $\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}V_1\\V_2\end{pmatrix}$ とおく．(4) と同じ略記のもとで

$$\mathrm{div}(h\boldsymbol{V}) = \partial_x(hV_1)+\partial_y(hV_2) = ((\partial_x h)V_1 + (\partial_y h)V_2) + h(\partial_x V_1 + \partial_y V_2) = \mathrm{grad}(h)\cdot\boldsymbol{V} + h\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}.$$

2. (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 6x-6y$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=0$, $\mathrm{div}\boldsymbol{W} = 6x-6y$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{W} = 2$.

   (2) $f(\boldsymbol{u}) := x^3 - xy - y^3$ とおくと $\mathrm{grad}(f) = \boldsymbol{V}$.

   (3) (2) より

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} = f(\boldsymbol{l}(\pi)) - f(\boldsymbol{l}(0)) = f\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -2.$$

   (2) と $\boldsymbol{l}(0)=\boldsymbol{m}(-1)$, $\boldsymbol{l}(\pi)=\boldsymbol{m}(1)$ であることから

$$\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m} = \int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} = -2.$$

   (4) $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{l}(t))\cdot\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) = \begin{pmatrix}3\cos^2 t - \sin t\\ -3\sin^2 t + \cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} = -3\cos^2 t\sin t - 3\sin^2 t\cos t + 1$ だから

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^\pi (-3\cos^2 t\sin t - 3\sin^2 t\cos t + 1)dt = \left[\cos^3 t - \sin^3 t + t\right]_0^\pi = -2+\pi.$$

   $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{m}(t))\cdot\dfrac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t) = \begin{pmatrix}3t^2\\ -t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -3t^2$ だから

$$\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{m} = -\int_{-1}^1 3t^2 dt = 2\left[-t^3\right]_0^1 = -2.$$

   (5) $\boldsymbol{l}(0)=\boldsymbol{m}(-1)$, $\boldsymbol{l}(\pi)=\boldsymbol{m}(1)$ だから，もし $\mathrm{grad}(g)=\boldsymbol{W}$ とすると $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{m}$. これは (4) に矛盾する．よって $\mathrm{grad}(g)=\boldsymbol{W}$ となる g は存在しない．

3. (1) $\boldsymbol{l}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ を

$$\boldsymbol{l}(t) = \begin{cases}(t-3n,\ 0) & 3n \le t \le 3n+1,\\ (-t+3n+1,\ t-3n) & 3n+1\le t\le 3n+2,\\ (0,\ -t+3n+3) & 3n+2 \le t \le 3n+3\end{cases}$$

   ($n\in\mathbb{Z}$) で定める．$\boldsymbol{l}$ は周期 3 の写像で $\boldsymbol{l}(\mathbb{R}) = L$ であり，$t \ne 3n, 3n+1, 3n+2$ ($n\in\mathbb{Z}$) において C^∞ 級で $\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) \ne \boldsymbol{0}$ だから，$\boldsymbol{l}$ は区分的に正則である．（※答は他にもあります）

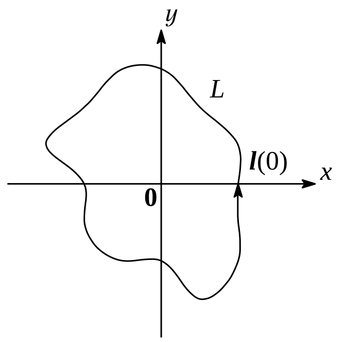
   (2) $f(\boldsymbol{u}) := -\dfrac{1}{2}e^{x^2-y^2}$ とすると $\mathrm{grad}(f) = \boldsymbol{V}$ だから，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} = f(\boldsymbol{l}(3)) - f(\boldsymbol{l}(0)) = f(\boldsymbol{l}(3)) - f(\boldsymbol{l}(0)) = 0$.

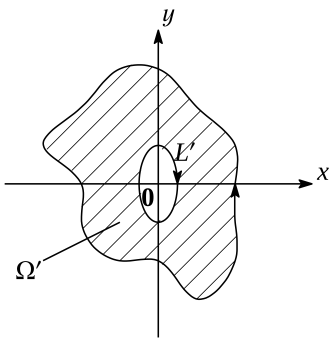
   (3) $\mathrm{div}\boldsymbol{W} = 7(x^6+7y^6)$. また $\Omega = \{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$ である．Gauss の発散定理より

$$\int_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l} = \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{W}dxdy = 7\int_\Omega (x^6+7y^6)dxdy = 7\int_\Omega 8x^6 dxdy \quad \text{（対称性から）}$$
$$= 8\int_{y=0}^1\left(\int_{x=0}^{1-y} 7x^6 dx\right)dy = \int_0^1 8(1-y)^7\,dy = 1.$$

4. (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = \dfrac{6xy}{(4x^2+y^2)^2}$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$（詳細略）

(2) $\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(0) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ より，十分小さい $\delta > 0$ について，$\boldsymbol{l}(\delta)$ は $y > 0$ の領域に，$\boldsymbol{l}(-\delta)$ は $y < 0$ の領域にある．$\boldsymbol{l}$ の周期を T とすると，中間値の定理から，少なくとも一つの $0 < t_0 < T$ に対し $\boldsymbol{l}(t_0)$ は x 軸上にある．このような任意の t_0 について，周期の定義から $\boldsymbol{l}(t_0) \neq \boldsymbol{l}(0)$ であることと，$L \cap \{(x,0) \mid x > 0\} = \{\boldsymbol{l}(0)\}$ であることから，$\boldsymbol{l}(t_0)$ は x 軸の $x < 0$ の部分にある．向きも考慮すると，L はおおむね下図左のような曲線である．





$r : [0,T] \to \mathbb{R}$ を

$$r(t) := |\boldsymbol{l}(t)|$$

で定義すると，r は閉区間上で定義された連続関数だから最小値 r_0 を持ち，$\boldsymbol{l}(t) \neq \boldsymbol{0}$ だから $r_0 > 0$ である．$0 < 2\epsilon < r_0$ をみたすような ϵ を取り

$$L' := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid (x/\epsilon)^2 + (y/2\epsilon)^2 = 1\}$$

とおくと，$L \cup L'$ は $\Omega' \subset \Omega$ をみたすような有界領域 Ω'（上図右）を囲む．Ω' の境界としては，L' は

$$\boldsymbol{m} : \mathbb{R} \to \Omega, \quad \boldsymbol{m}(t) := \epsilon\begin{pmatrix}\cos t\\ -2\sin t\end{pmatrix}$$

で向きづけられる．Ω' 上 $4x^2 + y^2 \neq 0$ だから，$\boldsymbol{V}$ は Ω' 上定義される．Green の公式より

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m} = \int_{\Omega} \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\, dxdy = 0.$$

ここで (1) より Ω' 上 $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$ であることを用いた．よって

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m} = -\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\epsilon^2}\begin{pmatrix}2\epsilon\sin t\\ \epsilon\cos t\end{pmatrix}\cdot\epsilon\begin{pmatrix}-\sin t\\ -2\cos t\end{pmatrix}dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi.$$

【2. (4), (5) の別解】

(4) 比較的容易な $\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{m} = -2$ を先に定義通り計算すると，比較的面倒な $\boldsymbol{l}$ のほうの計算を回避できます：
$\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$ で囲まれる半円を Ω とすると，Green の公式と (1) から

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{l} - \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{m} = \int_{\Omega} \mathrm{rot}\boldsymbol{W}\, dxdy = 2\int_{\Omega} dxdy = 2(\Omega\text{の面積}) = \pi.$$

よって

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{l} = \pi + \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{m} = \pi - 2.$$

(5) $\mathrm{rot}\boldsymbol{W} = 2 \neq 0$ だから，$\mathrm{grad}(g) = \boldsymbol{W}$ となる g は存在しない．

配点：15, 15, 12, 8 (**1**: $3\times5 = 15$,　**2**: $3\times5 = 15$,　**3**: $4\times3 = 12$,　**4**: $5+3 = 8$)

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_geometry/16_geometry.html`