特に断らなければ，関数やベクトル場は全て C^∞ 級のものとする．ベクトルは縦横のどちらで書いても差し支えない．$\partial_x f := \dfrac{\partial f}{\partial x}$ のような略記は断りなく用いてよい．

1. (1) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2+z^2-x^2 \\ z^2+x^2-y^2 \\ x^2+y^2-z^2 \end{pmatrix}$ に対し，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．（答のみでよい）

   (2) 関数 $f(x,y,z) := xy+yz+zx$ に対し，$\mathrm{grad}(f)(p) = \mathbf{0}$ となる $p=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．

   (3) 関数 $g(x,y,z) := \sin(ax+by+cz)$ に対し，$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(g))$ を計算せよ．ただし $a,b,c \in \mathbb{R}$ は定数とする．

   (4) 関数 $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対し，$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(h))$ を計算せよ．計算過程も分かるようにせよ．

   (5) $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{\varphi}(s,t) := (s^3,\ t,\ 1)$ で定義する．$\boldsymbol{\varphi}$ は平面 $z=1$ の $(0,0,1)$ のまわりの局所座標か，理由と共に答えよ．

2. $f(x,y,z) := x^2+y^2+4z^2$ とおき，$S := f^{-1}(1)$ とする．

   (1) $\mathrm{grad}(f)(p) = \mathbf{0}$ となる $p=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．

   (2) S は曲面であることを示せ．

   (3) $p=(a,b,c) \in S$ に対し，部分ベクトル空間 $T_pS \subset \mathbb{R}^3$ を表す方程式を求めよ．

   (4) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in T_p^{\perp}S$ となるような $p=(a,b,c) \in S$ をすべて求めよ．

   (5) S の向きを，S が囲む有界領域 Ω の内側から外側に向かう法ベクトルで定まるものとする．ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．

3. $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2 = 1\}$ とおく．

   (1) S は曲面であることを示せ．

   (2) S の向き $\boldsymbol{n} : S \to \mathbb{R}^3$ で，$\boldsymbol{n}(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるようなものを求めよ．

   (3) $S' := \{(x,y,z) \in S \mid -1 \le x \le 1\}$ は境界つきコンパクト曲面である（証明不要）．S' には (2) の向きを入れる．ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) := \begin{pmatrix} yz(x^2-1) \\ -zx^3 \\ x^3y \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{S'} \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．

4. $\mathbb{R}^3$ から z 軸を除いて得られる領域を Ω とし，Ω 上定義されるベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) := \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える．

   (1) $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．計算過程も分かるようにせよ．

   (2) Ω 内の正則な閉曲線 L は次の条件をみたすようなコンパクト曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ の境界であるとする：

      (i) S と z 軸の共通部分は k 点集合 $\{p_1, \ldots, p_k\}$, ただし自然数 $i=1,\ldots,k$ に対し $p_i := (0,0,i)$

      (ii) 自然数 $i=1,\ldots,k$ に対し，$D_i := \{(x,y,i) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1\}$ とおくと $D_i \subset S \setminus L$

      (iii) S は向きづけられており，向き $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{n}(p_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-1)^i \end{pmatrix}$ $(i=1,\ldots,k)$ をみたす

   $\boldsymbol{n}$ が L に誘導する向きが正則な周期的パラメータ $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to L$ で表されるとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

配点：15, 15, 12, 8　(**1**: $3\times5=15$,　**2**: $3\times5=15$,　**3**: $3+4+5=12$,　**4**: $3+5=8$)