幾何入門 期末試験（2016 年 7 月 29 日）解答例

担当：境 圭一

1. (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = -2(x+y+z)$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 2\begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}$.

(2) $\mathrm{grad}(f)(p) = \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x+y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ とすると $p = (0,0,0)$.

(3) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(g)) = \Delta g = -(a^2+b^2+c^2)\sin(ax+by+cz)$.

(4) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(h)) = \begin{pmatrix} \partial_y(\partial_z h) - \partial_z(\partial_y h) \\ \partial_z(\partial_x h) - \partial_x(\partial_z h) \\ \partial_x(\partial_y h) - \partial_y(\partial_x h) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$. ただし h が C^∞ 級なので偏微分の順序交換ができることを用いた.

(5) $D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の階数は 1 だから，$\boldsymbol{\varphi}$ は平面 $z=1$ の $(0,0,1)$ のまわりの局所座標ではない.

2. (1) $\mathrm{grad}(f)(p) = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ 4z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ とすると $p = (0,0,0)$.

(2) $f(1,0,0) = 1$ だから $(1,0,0) \in S$，よって $S \neq \emptyset$. また $f(0,0,0) = 0 \neq 1$ だから $(0,0,0) \notin S$ であり，(1) と合わせると，S 上 $\mathrm{grad}(f) \neq \mathbf{0}$ であることがわかる．よって S は曲面である.

(3) T_pS は $\mathrm{grad}(f)(p) = 2\begin{pmatrix} a \\ b \\ 4c \end{pmatrix}$ に直交する平面だから，$ax+by+4cz = 0$ で表される.

(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in T_p^\perp S$ とすると，(3) より $k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 4c \end{pmatrix}$ をみたす $k \in \mathbb{R}$ が存在する．$p \in S$ より $a^2+b^2+4c^2 = 1$ だから $k^2 + (-k)^2 + 4(k/2)^2 = 1$, よって $k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 従って $p = \pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

(5) $\boldsymbol{V}$ は $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+4z^2 \leq 1\}$ 上定義される．S の向きに注意すると，Gauss の発散定理から

$$\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{V}\, dxdydz = 3\int_\Omega dxdydz = 3 \cdot (\Omega\text{の体積}).$$

$B^3 = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| \leq 1\}$ とおくと，Ω は線形変換 $(x,y,z) \mapsto (x,y,z/2)$ による B^3 の像である．よって Ω の体積 $= \dfrac{1}{2}(B^3\text{の体積}) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$, 従って $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = 2\pi$.

3. (1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y,z) := y^2 + z^2$ で定義すると $S = f^{-1}(1)$. $f(0,1,0) = 1$ だから $(0,1,0) \in S$，よって $S \neq \emptyset$. $\mathrm{grad}(f)(p) = 2\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ とすると $p = (x,0,0)$ $(x \in \mathbb{R})$ だが，$f(x,0,0) = 0 \neq 1$ だから $(x,0,0) \notin S$，よって S 上 $\mathrm{grad}(f) \neq \mathbf{0}$. 従って S は曲面である.

(2) $T_p^\perp S$ の基底として $\mathrm{grad}(f)(p)$ を取れることから，$\boldsymbol{n} = \pm\dfrac{\mathrm{grad}(f)}{\left|\mathrm{grad}(f)\right|} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$. ここで S 上 $y^2 + z^2 = 1$ であることを用いた．$\boldsymbol{n}(0,1,0) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるよう符号を取れば，求める向きは $\boldsymbol{n}(x,y,z) = -\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(3) $\partial_\pm S' := \{(\pm 1, y, z) \in S\}$ とおけば $\partial S' = \partial_+ S' \cup \partial_- S'$（図 1 左を参照）．(2) の $\boldsymbol{n}$ が $\partial_\pm S'$ に導く向きは，それぞ

れ $\boldsymbol{l}_{\pm}(t) := \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \cos(\pm t) \\ \sin(\pm t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \cos t \\ \pm \sin t \end{pmatrix}$ で表せることがわかる．Stokes の定理から

$$\begin{aligned}
\int_{S'} \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} &= \int_{\partial_+ S'} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}_+ + \int_{\partial_- S'} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}_- \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ -1^3 \cdot \sin t \\ 1^3 \cdot \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt + \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ -(-1)^3 \cdot (-\sin t) \\ (-1)^3 \cdot \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} dt \\
&= 2 \int_0^{2\pi} dt = 4\pi.
\end{aligned}$$

4. (1) $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$.（詳細略）

(2) $D_i^\circ := \{(x, y, i) \in D_i \mid x^2 + y^2 < 1\}$ とおく．条件 (ii) より $S' := S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k D_i^\circ\right)$ は境界つきコンパクト曲面で，$L_k := \partial D_k$ とおくと $\partial S' = L \cup \left(\bigcup_{i=1}^k L_i\right)$（図 1 右を参照）．条件 (iii) と $\boldsymbol{n}$ の連続性から L_i 上 $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-1)^i \end{pmatrix}$. よって $\boldsymbol{n}$ が L_i に導く向きは $\boldsymbol{l}_i(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ (-1)^{i+1} \sin t \\ i \end{pmatrix}$ で表せることがわかる．条件 (i) より $S' \subset \Omega$ であり，$\boldsymbol{V}$ は Ω 上で定義されるから，Stokes の定理より

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} + \sum_{i=1}^k \int_{\boldsymbol{l}_i} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}_i.$$

(1) より左辺は 0. また

$$\int_{\boldsymbol{l}_i} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}_i = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}} \begin{pmatrix} (-1)^i \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ (-1)^{i+1} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 2\pi \cdot (-1)^{i+1}.$$

よって

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} = \sum_{i=1}^k 2\pi \cdot (-1)^i = \begin{cases} -2\pi & (k \text{ が奇数のとき}) \\ 0 & (k \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

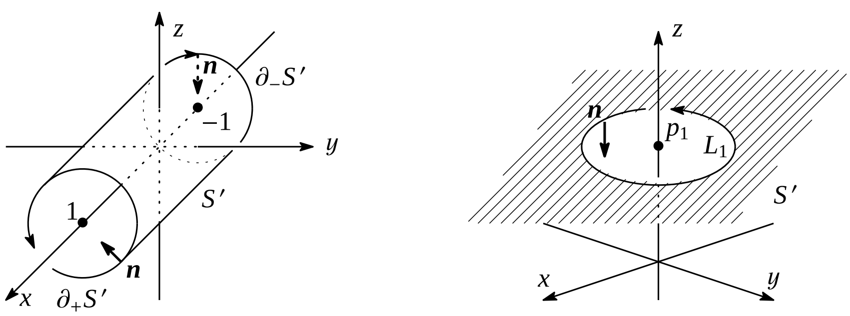

図 1　問 3. の S' と問 4. の S' の（p_1 付近での）境界の向き

配点：15, 15, 12, 8　(**1**: $3 \times 5 = 15$,　**2**: $3 \times 5 = 15$,　**3**: $3 + 4 + 5 = 12$,　**4**: $3 + 5 = 8$)