# 2016 年度 幾何入門 期末試験 結果

担当：境 圭一

平均点は 28.0 点，最高点は 42 点でした．人数分布は以下の通りです：

| 点数 | ~ 15 | 16 ~ 20 | 21 ~ 25 | 26 ~ 30 | 31 ~ 35 | 36 ~ 40 | 41 ~ 42 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15S | 1 | 7 | 4 | 20 | 14 | 6 | 2 |
| それ以外 | 1 | 5 | 4 | 1 | 4 | 0 | 0 |

問題ごとの平均点は以下の通りです：

15S：

| 問題 | 1 | 2 | 3 | 4 | 合計 |
|---|---|---|---|---|---|
| 平均 | 11.0 | 11.2 | 4.2 | 2.8 | 29.1 |

それ以外：

| 問題 | 1 | 2 | 3 | 4 | 合計 |
|---|---|---|---|---|---|
| 平均 | 10.8 | 9.1 | 2.5 | 2.6 | 25.0 |

答案用紙 No. 1 の右上に赤で書いてあるのが期末試験の点数，青で書いてあるのはレポート 1 ~ 14 の点数の合計です（最大 30 点）．大問ごとの点数は各用紙の右下または裏面に書いてあります．何も書いてなければ 0 点です．また，○で囲ったアルファベットは最終的な成績です：

S：「秀」，　A:「優」，　B：「良」，　C：「可」，　F：「不可」

レポートは 各回 2 点 × 14 回 ですが，30 点分つけると最初に宣言しましたので，中間・期末試験を両方受験した人には +2 点つけました．

最終的な成績の分布は以下の通りです．平均点は 67.0 点，最高点は 100 点でした（100 点を超えた人もいますが，データ上は 100 点です）．

| 成績 | 不可 (F) | 可 (C) | 良 (B) | 優 (A) | 秀 (S) |
|---|---|---|---|---|---|
| 人数 (15S) | 6 | 19 | 15 | 8 | 9 |
| 人数 (15S 以外) | 9 | 8 | 3 | 3 | 3 |

もう少しだけ慎重になっていれば間違えないのに，というもったいない誤りがたくさんあります．例えば 1. (2) での “$\mathrm{grad}(f) = (y, z, x)$” とか，3. (3) での “$\boldsymbol{l}(t) = (0, \cos t, \pm \sin t)$” などです．自分が書いたものを客観的にもう一度見直す，というのは案外難しく，訓練が必要なことだと思いますが，ちょっとした（しかし重大な）ミスを見つけるためには，どうしても必要なことです．今後もレポートを書く機会はたくさんあるはずですから，意識してみてほしいと思います．

言いたいことが伝わる文章にするためには，まだ改善の余地がありそうです．例えば 2. (2) の解答例としては，次の (i) が望ましく，(ii) は理由と結論が分断して，わかりにくくなっています．(i) を書けるようになってください．

(i) $f(1, 0, 0) = 1$ より $(1, 0, 0) \in S$，よって $S \neq \emptyset$．また $f(\mathbf{0}) \neq 1$ より $\mathbf{0} \notin S$，従って (1) より $S$ 上 $\mathrm{grad}(f) \neq \mathbf{0}$．⋯

(ii) $f(\mathbf{0}) \neq 1$ より $\mathbf{0} \notin S$．また $f(1, 0, 0) = 1$ より $(1, 0, 0) \in S$．従って $S \neq \emptyset$，また (1) より $S$ 上 $\mathrm{grad}(f) \neq \mathbf{0}$．⋯

以下，問題ごとのコメントです．

1. (5) がほとんどできていませんでした．問われていることは過去 2 回の問 1. (1) とだいたい等価であることに注意してください．局所座標の条件のうち一つでもみたされないものがあれば否定的な結論を得ますから，答案に書く内容としては Jacobi 行列の階数だけで十分で，単射性などは不要です．
   (1) や (3) で $\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ がベクトル場になっている人がいました．一般の次元において，$\mathrm{div}\boldsymbol{V} := \sum_{1 \le i \le n} \dfrac{\partial V_i}{\partial x_i}$ はスカラー場（関数）です．また，覚え方として “ $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \nabla \times \boldsymbol{V}$ ” のようなことは講義でも述べましたが，$\nabla$ という「ベクトル」が存在するわけではないので（何らかの意味づけをしない限りは），答案には書かないほうが無難です．(3) で $-\sin(ax + by + cz) \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$ のように書いた人がいましたが，一般に $k \sin\theta$ のように書くべきです．$\sin\theta k$ と書くと，普通は $\sin(\theta \cdot k)$ の意味に取られると思います．

2. (2) では $S \neq \emptyset$ の確認も要求することにしました（ほぼ自明ですが）．“$f(1) = 6 \neq 0$ だから $\mathbf{0} \notin S$” という答案が複数あったのが気になりました．$f^{-1}(k)$ の意味が理解されていない可能性があります．(3) では $2ax+2by+8cz = 0$ も正解としましたが，原則として，なるべく簡単な形で表示するようにしてください．また “$T_pS = ax+by+4cz = 0$” は変です（最左辺はベクトル空間，それ以外は実数（多項式））．“$ax + by + 4cz = 1$” は減点です（$T_pS$ は $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間ですから原点を通ります）．(5) は Gauss の発散定理を使えば容易ですが，$\Omega$ の体積については人によって理解に差があるようでした．一般に，ある領域 $\Omega'$ を線形変換 $f : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$（$A$ は正方行列）でうつして得られる領域を $\Omega$ とすると，$\Omega', \Omega$ の体積 $V(\Omega'), V(\Omega)$ について $V(\Omega) = |\det A|\, V(\Omega') \cdots (*)$ です．この問題の場合 $\Omega' = B^3$（解答例を参照），$A = \mathrm{diag}(1, 1, 1/2)$（対角行列）とすれば $V(\Omega) = \dfrac{4\pi}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\pi}{3}$ です．$(*)$ は $f$ の Jacobi 行列が $A$ そのものであることから，$V(\Omega) = \displaystyle\int_\Omega d\boldsymbol{x}$ を変数変換することで示されます．その証明の中に次元 $n$ が一切現れないことにも注意してください．
3. 細かい設定は変わっていますが，2 年前の問 3 とほぼ同一の問題です．(1) では $S \neq \emptyset$ の確認も要求しました．(2) では分母に現れる $y^2 + z^2$ を 1 にしていなくても特に減点はしませんでしたが，原則として，なるべく簡単な形で表示するようにしてください．(3) は $\partial S$ の向きをきちんと把握できるか，という問題ですから，それなりの議論がなされていなければ，答が合っていても減点です．
4. (2) は正解者がいませんでした．$p_i \in S$ $(i = 1, \ldots, k)$ において $\boldsymbol{V}$ が定義されませんから，$S$ を含むどんな領域 $(\ni p_i)$ においても $\boldsymbol{V}$ は定義されません．よって「Stokes の定理から $\displaystyle\int_L \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$」というのは誤りです．逆に言うと，$S$ から $p_i$ の近傍 $D_i$ を取り除いてしまえば Stokes の定理を適用できる状況になり，求める積分は $D_i$ の境界に沿った積分の和になります．これらは具体的なパラメータを使って計算できます．

採点には万全を期しましたが，万が一誤りがあると思われる場合は，成績を確定させる予定の 8/23（火）までに申し出てください．答案は全てコピーを取り保存していますので，ただちに調べます．

**まとめ，今後の展望**

今後学ぶ数学のほとんどは，何らかの意味で，線形代数または微分積分（または両方）を発展させたものです．この講義で扱った内容（ベクトル解析）はその発展のスタート地点のような位置づけです．関数のある種の一般化であるベクトル場に対し，微分にあたるものとして grad, div, rot といった作用素を，積分にあたるものとして線・面積分を定義しました．これらは力学や電磁気学などに由来するものですが，微分積分学の基本定理の拡張と言える Gauss の発散定理や Stokes の定理が成り立つことから，数学的にも正当なものと言えます．また曲線の接線や曲面の接平面を関数の 1 次近似として捉えることで，Taylor 展開の幾何学的意味がある程度明確になりました．接線や接平面はベクトル空間なので，幾何学に線形代数を適用するための足掛かりとなります．
ここからの発展の方向はいろいろありますが，今回は 3 年次に学ぶ**トポロジー**へのつながりを少し意識してみました．期末試験の 4. (2) の積分は，$L$ と $z$ 軸の「**絡み数**」とよばれる数の $2\pi$ 倍に一致しています．これが 0 でないとき，閉曲線 $L$ は決して $z$ 軸から「外せない」ということがわかります．このように，この講義で述べた積分のうちいくつかは，曲線の連続変形のもとで変化しない性質（$z$ 軸から外れない，ということなど）を取り出した，**不変量**と呼ばれるものになっています．詳しくは「トポロジー」というキーワードで教科書を探して読んでみてください．幾何学以外の場面でもベクトル解析の内容が生かされることがあると思いますので，今後いろいろな数学を学ぶときに意識してみると面白いかもしれません．

(8/2)