

問題. G, G_1, G_2 などは Abel 群とは限らない群とする. 群の演算を $G \times G \ni (g, h) \mapsto gh \in G$ で表す. G, G_1, G_2 の単位元を e, e_1, e_2 で表す.

- (1) G の単位元 $e \in G$ は唯一つに定まることを示せ. また各 $g \in G$ に対し, その逆元 g^{-1} は唯一つに定まることを示せ.
- (2) $H \triangleleft G$ (正規部分群), つまり $H < G$ (部分群) で, 任意の $h \in H$ と $g \in G$ に対し $g^{-1}hg \in H$ が成り立つとする. $g \in G$ に対し $gH := \{gh \in G \mid h \in H\}$ とおく.
- $g_1 \sim g_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} g_1H = g_2H$ は G 上の同値関係であることを示せ.
 - \sim による商集合を G/H と書く. $g \in G$ を含む同値類を $[g] (= gH)$ と書くとき

$$[g_1][g_2] := [g_1g_2]$$

により G/H は群の構造を持ち, 単位元は $[e]$, $[g]$ の逆元は $[g^{-1}]$ となることを示せ. G/H を商群 (quotient group), 剰余群 (factor group) などとよぶ.

- (3) G が Abel 群であるとき, 任意の部分群 $H < G$ は正規であることを示せ.
- (4) $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ を準同型とすると,
- $\text{Ker } \varphi \triangleleft G_1$ であることを示せ.
 - 「 φ が単射 $\iff \text{Ker } \varphi = \{e_1\}$ 」を示せ. (このとき $\varphi: G_1 \hookrightarrow G_2$ と書く)
 - 「 φ が全射 $\iff \text{Im } \varphi = G_2$ 」を示せ. (このとき $\varphi: G_1 \twoheadrightarrow G_2$ と書く)
- (5) 直積集合 $G_1 \times G_2$ 上に

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2) := (g_1h_1, g_2h_2)$$

で積を定義することにより $G_1 \times G_2$ は群の構造を持ち, 単位元は (e_1, e_2) , (g_1, g_2) の逆元は (g_1^{-1}, g_2^{-1}) となることを示せ. $G_1 \times G_2$ を直積群 (direct product) とよぶ.

補足. 上のようなことは既に学んでいるはずですが, 不安があれば何度でもやってみることをおすすめします. 特に商群 G/H はこの講義では最も重要なものの一つですから, よく理解してほしいと思います. 積 $[g_1][g_2] = [g_1g_2]$ が well-defined なのはどのようにしてでしょうか? H が正規でなければならないのはなぜでしょうか?

群の演算は gh のように積で表すのが一つの流儀ですが, Abel 群の場合には gh の代わりに $g+h$ のように和の記号を使って群の演算を表すこともあり, この講義では後者の記法を採用します (参考書がそうなっているから). 行列の和と積のことを思い出すと, 可換な場合に和の記号を使い, 非可換な場合に積の記号を使う, という気持ちは何となくわかると思います. この記法では, Abel 群の単位元は 0 で, g の逆元は $-g$ で表します. Abel 群の商群 G/H の群構造は $[g] + [h] := [g+h]$ で定義されます. 自明な群 (単位元だけからなる群) は $\{0\}$ とか, 単に 0 で表します. また直積群は, Abel 群の場合は直和 $G_1 \oplus G_2$ で表すことが多いようです.