

問題 1.

$$(1) \text{ 群の系列 } G_* : 0 \longrightarrow G_2 \xrightarrow{\partial_2} G_1 \xrightarrow{\partial_1} G_0 \longrightarrow 0,$$

$$G_2 = G_1 = G_0 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad \partial_2(k, l) := (k + l, k + l), \quad \partial_1(m, n) := (m - n, n - m)$$

はチェイン複体であることを示せ.

(2) 次の同型を示せ:

$$H_i(G_*) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 2 \\ 0 & i \neq 0, 2 \end{cases}$$

問題 2.

$$(1) \text{ 講義でやったチェイン複体 } G'_* : 0 \longrightarrow G'_2 \xrightarrow{\partial'_2} G'_1 \xrightarrow{\partial'_1} G'_0 \longrightarrow 0,$$

$$G'_2 = G'_1 = G'_0 = \mathbb{Z}, \quad \partial'_2(m) := 2m, \quad \partial'_1 = 0$$

を考える. 問題 1 のチェイン複体 G_* に対し, $\varphi_* : G_* \rightarrow G'_*$ を, 各 $i = 0, 1, 2$ に対し $\varphi_i : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (k, l) \mapsto k + l$ で定義すると, φ_* はチェイン準同型であることを示せ.

(2) $\varphi_* : H_i(G_*) \rightarrow H_i(G'_*)$ は, $i = 0$ のとき同型, それ以外では自明な準同型であることを示せ.

ヒント. $H_i(G_*) \cong \mathbb{Z} (i = 0, 2)$ を示すとき, 定義通り $H_i(G_*) = Z_i(G_*)/B_i(G_*)$ を計算するわけですが, まず

$$(i) B_2(G_*) = 0, \quad Z_2(G_*) = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{Z}\},$$

$$(ii) B_0(G_*) = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{Z}\}, \quad Z_0(G_*) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

です (確かめてください). (i) より $H_2(G_*) = Z_2(G_*)/B_2(G_*) = Z_2(G_*) = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ですが, この群は

$$f : \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(a, -a) := a$$

により \mathbb{Z} と同型です. f が準同型で, 全射かつ単射であることを示してください.

また (ii) より $H_0(G_*) = Z_0(G_*)/B_0(G_*) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\{(a, -a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ですが, この群は

$$g : (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\{(a, -a)\} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad g([m, n]) := m + n$$

により \mathbb{Z} と同型です. g が代表元 (m, n) の取り方によらず well-defined な準同型で, 全射かつ単射であることを示してください.

多少の慣れがないと, 上のように商 Abel 群を求める (同型 f, g を見つける) のは簡単ではないかもしれませんが. このあたりについては, このあとの講義で少し補足します.

補足. 講義で飛ばした定理 2.16 の詳細な証明は, 各自でぜひ一度はやってみてください. 証明を文章で書くだけでなく, 可換図式上で考えること (diagram chasing) をおすすめします. 一度やった後は証明の詳細な内容を暗記する必要はなく, 定理を実際にどう使うか, が大切です. 応用する機会がたくさんある重要な定理です.

2次元球面を S^2 , 2次元射影平面を $\mathbb{R}P^2$ と書くとき, 実は $H_i(G_*) \cong H_i(S^2)$, $H_i(G'_*) \cong H_i(\mathbb{R}P^2)$ で, 問題 2 のチェイン準同型 φ_* は二重被覆 $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ に対応します. 正確な意味は, 講義の後半で明らかになる予定です.