幾何学特別講義 IV レポート問題 1（2016 年 10 月 20 日）

担当：境 圭一

問題. 各自の学籍番号の数字下二桁を a, b とする．例えば S141098Z なら $a = 9, b = 8$.
チェイン複体

$$G_*:\ 0 \xrightarrow{\partial_2} G_1 \xrightarrow{\partial_1} G_0 \xrightarrow{\partial_0} 0, \qquad G_1 = G_0 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad \partial_1(m, n) := (am + 6n,\ m - bn)$$

のホモロジー群 $H_i(G_*)$ $(i = 0, 1)$ を計算せよ.

ヒント．定義通り $H_i(G_*) = \operatorname{Ker} \partial_i / \operatorname{Im} \partial_{i+1}$ を計算する．$H_0(G_*)$ の計算に 10/20 の講義の内容を使う.

※締切：10/27 の講義開始時．教卓の上に置いてください.

※代理提出可です.

※締切以前の提出も受け付けます．研究室 (A403) にお越しください.

幾何学特別講義 IV 演習問題 4（2016 年 10 月 20 日）

担当：境 圭一

問題 1. 自由 Abel 群 $\mathbb{Z}S$ が実際に Abel 群になっていることを確かめよ．また $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ $(n \geq 1)$ とするとき，$\mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}^{\oplus n}$, $\quad \sum_i a_i x_i \mapsto (a_1, \dots, a_n)$ は Abel 群の同型であることを示せ.

問題 2. $S := \{x_1, \dots, x_n\}$ とする．次の準同型 $\varphi : \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}S$ は Abel 群の同型であることを示せ.

(1) $i, j \in S$ $(i \neq j)$ と $k \in \mathbb{Z}$ を固定するとき

$$\varphi(x_l) := \begin{cases} x_l & l \neq i, \\ x_i + kx_j & l = i. \end{cases}$$

(2) $i, j \in S$ を固定するとき

$$\varphi(x_l) := \begin{cases} x_l & l \neq i, j, \\ x_j & l = i, \\ x_i & l = j. \end{cases}$$

(3) $i \in S$ を固定するとき

$$\varphi(x_l) := \begin{cases} x_l & l \neq i, \\ -x_i & l = i. \end{cases}$$

注意. φ は準同型ですから，(1)〜(3) いずれについても，$\mathbb{Z}S$ の一般の元 $x = \sum_l a_l x_l$ に対しては $\varphi(x) = \sum_l a_l \varphi(x_l)$ となります.

問題 3. Abel 群の可換図式

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G_1 \arrow[d, "g"] \\ H_2 \arrow[r, "\psi"] & G_2 \end{tikzcd}$$

が与えられたとする.

(1) $\overline{g} : G_1/\mathrm{Im}\,\varphi \to G_2/\mathrm{Im}\,\psi$, $\quad \overline{g}([x]) := [g(x)]$ は well-defined な準同型であることを示せ.
(2) f, g が同型であるとき，$\overline{g}$ は同型であることを示せ.

補足. 10/20 の講義では，$H_i(G_*) = Z_i(G_*)/B_i(G_*)$ の計算を念頭に，$\varphi : \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}T$ に対し $\mathbb{Z}T/\mathrm{Im}\,\varphi$ の計算を扱いました．位相空間（単体複体）X のホモロジー群を計算するときは，定義通り $Z_i(X)/B_i(X)$ を計算することは得策でない場合が多く，X をいくつかの（計算しやすい）部分空間 $X_1, X_2, \dots$ に分割し，それらのホモロジー群 $H_*(X_k)$ たちを組み合わせて $H_*(X)$ を決定する，といった方法を採ることが多いように思います．その際のカギの一つが，10/13 の講義でやった定理 2.16 の完全系列です.
とは言っても，そういった簡略化はいつでも可能なわけではなく，仕方なく定義通りに計算するしかない場合もありますから，地道に剰余群を求める方法にも慣れておくとよいと思います．問題 3 はそのようなときに役立つかもしれず，$G_1/\mathrm{Im}\,\varphi$ を求めたいときに，よりわかりやすい表示を持つ G_2, H_2 にうまく同型で書き換えられれば，$G_2/\mathrm{Im}\,\psi$ のほうが計算しやすい可能性があります．図式が可換であることが大切で，可換性を無視すると，演習問題 2 の補足のような誤りの原因になります.