幾何学特別講義 IV レポート問題 1（2016 年 10 月 20 日）コメント

担当：境 圭一

まず $\mathrm{Ker}\,\partial_1 = 0$ であることから $H_1(G_*) = 0$ です．∂_2 の定義域は 0 なので，調べずとも $\mathrm{Im}\,\partial_2 = 0$ です．
∂_0 の値域は 0 なので，調べずとも $\mathrm{Ker}\,\partial_0 = G_0 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ です．よって $H_0(G_*) = G_0/\mathrm{Im}\,\partial_1$ です．一方 ∂_1 は

$$\partial_1 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, \quad \text{ただし} \quad P := \begin{pmatrix} a & 6 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$$

で与えられ，10/20 の講義でやった「P が定める群」が $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\mathrm{Im}\,\partial_1 = H_0(G_*)$ に他なりません．P の 2 行目の a 倍を 1 行目から引き，そのあと 1 列目の b 倍を 2 列目に足すと

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 6+ab \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に変形されます．Q が定める群は

$$\langle x_1, x_2 \mid x_2, (6+ab)x_1 \rangle \cong \langle x_1 \mid (6+ab)x_1 \rangle \cong \mathbb{Z}/(6+ab)$$

です．あとは各自の a, b を代入すれば答が得られます．対角行列にこだわって，うまく基本変形をできなかった人もいたようです．どうしても対角行列にしたければ，P の $(2,1)$ 成分が 1 であることに注目し，行の入れ替えをすればよいと思います．
H_1 が 10 点，H_0 が 15 点の計 25 点満点で採点しています．当然ながら，途中の議論により部分点や減点があります．

気になったのは，P を Q に変形したあと

$$\text{「よって} \quad \mathrm{Im}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z} \oplus (6+ab)\mathbb{Z}, \quad \text{従って} \quad H_1(G_*) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \oplus (6+ab)\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(6+ab)\text{」}$$

という答案です．間違いとも言い切れませんが，好ましくないと思うので減点しています．上のようにしていい理由は，同型 $\mathrm{Im}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z} \oplus (6+ab)\mathbb{Z}$ が次の図式の左側を可換にするように取れるからです：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}\,\partial_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & G_0/\mathrm{Im}\,\partial_1 \arrow[d] \\
\mathbb{Z} \oplus (6+ab)\mathbb{Z} \arrow[r, hook] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, two heads] & (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \oplus (6+ab)\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

左側が可換であれば，右の縦の写像が導かれ，これも同型であることが示せます．この可換性をないがしろにすると，誤った結論が出てきます．例えば $m \mapsto (6+ab)m$ で定まる写像 $\mathbb{Z} \to (6+ab)\mathbb{Z}$ は群の同型ですから，a, b に関わらず $\mathrm{Im}\,\partial_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ です（この同型は上の図式を可換にしません）．この同型を安易に使えば $H_0(G_*) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = 0$ となってしまうように見えますが，これは正しくありません．演習問題 2, 4 の補足もご覧ください．
他の誤りとしては，$\mathrm{Ker}\,\partial_1$ を求めるとき，

$$\partial_1(m,n) = 0 \quad \text{とおくと} \quad am + 6n = m - bn = 0 \quad \text{より} \quad (6+ab)n = 0$$

とするわけですが，ここから $n = 0$ を結論づけなかった答案がいくつかありました．$n \in \mathbb{Z}$ ですから，自然数倍して 0 になる n は 0 です．もちろん，一般の Abel 群（加群）G の元 g が $kg = 0$ $(k \in \mathbb{Z})$ をみたしても，安易に $g = 0$ と結論付けてはいけません．例えば $G = \mathbb{Z}/k$ なら，$g \in G$ が 0 でなくとも $kg = 0$ です．