幾何学特別講義 IV 演習問題 5（2016 年 10 月 27 日）

担当：境 圭一

問題. $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ $(n \geq 1)$ は一般の位置にあるとし，$\sigma := |v_0 \cdots v_n|$ とする．

(1) $n \leq N$ であることを示せ．

(2) σ の k 次元面単体の数 b_k を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$ を求めよ．また $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k$ を求めよ．

(4) σ の面単体を全て集めた集合 K, ならびに $L := K \setminus \{\sigma\}$ は単体複体であることを示せ．

(5) $D^n := \{p \in \mathbb{R}^n \mid |p| \leq 1\}$,　$S^{n-1} := \{p \in \mathbb{R}^n \mid |p| = 1\}$ とおく．同相 $|K| \approx D^n$,　$|L| \approx S^{n-1}$ を構成せよ．

補足．前期の「トポロジー」を学んだ人は，単体複体を概ね次のようなものと定義したと思います：
$S = \{0, \dots, n\}$ の部分集合族 $\Sigma = \{S_1, \dots, S_k \mid S_1, \dots, S_k \subset S\}$ が次の (i), (ii) をみたすとき，(S, Σ) の組を S を頂点集合に持つ**単体複体**とよぶ：

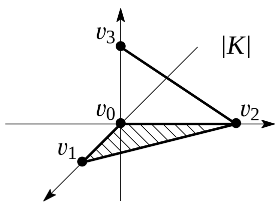
(i) $0 \leq i \leq n$ に対し $\{i\} \in \Sigma$（つまり，$\exists j, \{i\} = S_j$ ということ）

(ii) $S_i \in \Sigma, T \subset S_i$ のとき $T \in \Sigma$（つまり，$\exists j, T = S_j$ ということ）

これは**抽象的単体複体**とよばれるものの定義です．この講義でやった単体複体とは一見別物ですが，実は本質的には同じものです．このことを，簡単な場合を例にとって説明します．まず準備として，$\mathbb{R}^m$ を $\{(x_1, \dots, x_m, 0) \in \mathbb{R}^{m+1}\}$ と同一視することにより，自然に $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ とみなしておきます．

(1) $S = \{0, 1, 2, 3\}$, $\Sigma = \{\{i\}\}_{0 \leq i \leq 3} \cup \{\{i, j\}\}_{(i,j)=(0,1),(1,2),(2,0),(2,3)} \cup \{\{0, 1, 2\}\}$ とすると (S, Σ) は抽象的単体複体です．まず，元の数が最も多い $\{0, 1, 2\}$ の元に対応して，$v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ $(\subset \mathbb{R}^3)$ を，$v_0 = (0, 0)$, $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ と取ります（右下図参照）．細かい座標にあまり意味はなく，一般の位置にあることが重要です．$v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ とみると $v_0 = (0, 0, 0)$, $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ です．次に元の数が多い集合のうち，まだ考えていない $3 \in S$ を含む $\{2, 3\}$ に注目し，$3 \in S$ に対応して $v_3 := (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ と取ります．座標にあまり意味はなく，v_3 が v_0, v_1, v_2 を含む平面 $\mathbb{R}^2$ の外にあることが大事です．このとき

- $\{i\} \in \Sigma$ に対応して 0 単体 $|v_i| \subset \mathbb{R}^3$ を，
- $\{i, j\} \in \Sigma$ に対応して 1 単体 $|v_i v_j| \subset \mathbb{R}^3$ を，
- $\{0, 1, 2\} \in \Sigma$ に対応して 2 単体 $|v_0 v_1 v_2| \subset \mathbb{R}^3$ を，



それぞれ考え，これらを集めて得られる集合を K と書くと，K は講義の例 3.6 でやった単体複体になっています．幾何的実現 $|K|$ は図の通りです．

(2) $K = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ を 10/27 の講義でやった意味の単体複体とします．$\sigma_1, \dots, \sigma_k$ の頂点を全て集め，重複を取り除くと $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ となるとします．このとき $S := \{0, \dots, n\}$ とし，S の部分集合族 Σ を

$$\{i_0, \dots, i_m\} \in \Sigma \iff |v_{i_0} \cdots v_{i_m}| \in K$$

となるよう定義すると，(S, Σ) は抽象的単体複体になっています．

(3) 上の (1), (2) の対応は（同相な空間を同一視すれば）互いの逆対応になっています．

この講義の単体複体は（ある程度）絵に描けるのでわかりやすいのですが，複雑になってくると，二つの単体が面以外で交わらないように絵を描くのは困難です．抽象的単体複体のほうが「頂点がいくつあって，どの頂点の組が単体を張っているか」という単体複体の本質を（絵に惑わされず）よく表したものと言えます．