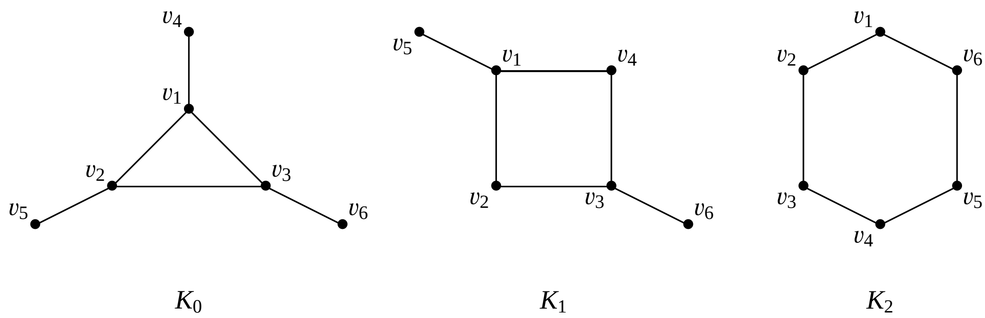
幾何学特別講義 IV レポート問題 2（2016 年 11 月 10 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の数字の下一桁を m とし，m を 3 で割った余りを $n\,(=0,1,2)$ とする．例えば 14S1098Z なら $m=8$, $n=8 \mod 3=2$.

$i=0,1$ に対し，$H_i(K_n)$ を計算せよ．ただし K_n は下図により表される 1 次元単体複体である．



※締切：11/17（木）の講義開始時

※代理提出可です.

※締切前の提出も受け付けます．研究室にお越しください.

幾何学特別講義 IV 演習問題 6（2016 年 11 月 10 日）

担当：境 圭一

※提出の必要はありません．レポート問題は裏面をご覧ください．

問題 1. $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ $(n \geq 1)$ は一般の位置にあるとする．

(1) $\sigma^3 := |v_0 v_1 v_2 v_3|$ の全ての面単体からなる単体複体を K_3 とおく．$H_i(K_3)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ を計算せよ．

(2) $L_3 := K \setminus \{\sigma^3\}$ とおく．$H_i(L_3)$ $(i = 0, 1, 2)$ を計算せよ．

(3) $\sigma^n := |v_0 \cdots v_n|$ の全ての面単体からなる単体複体を K_n とし，$L_n := K \setminus \{\sigma^n\}$ とおく．$H_i(K_n)$ $(i = 0, \dots, n)$, $H_i(L_n)$ $(i = 0, \dots, n-1)$ の計算を試みよ．

問題 2. $v_0 = (0, 0)$, $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, -1)$, $v_3 = (-1, 1)$, $v_4 = (-1, -1) \in \mathbb{R}^2$ とする．

(1) $K = \{|v_0|, |v_1|, |v_2|, |v_3|, |v_4|, |v_0 v_1|, |v_1 v_2|, |v_2 v_0|, |v_0 v_3|, |v_3 v_4|, |v_4 v_0|\}$ とおく．$|K|$ は $S^1 \vee S^1$（二つの S^1 の一点和）と同相であることを示せ．

(2) $H_i(K)$ $(i = 0, 1)$ を計算せよ．

問題 3. トーラスを，正方形の向かい合右辺を「同じ向きに」同一視して得られるものとみなす（図 1 左）．図 1 右の K（各三角形の内部も含む）は 2 次元単体複体で，トーラスの単体分割を与えていることを示せ．$H_i(K)$ $(i = 0, 1, 2)$ の計算を試みよ．（参考書の 42 ページ参照）

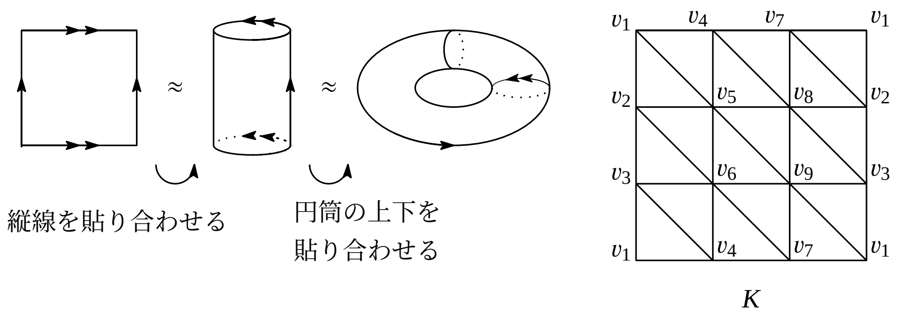


図 1　トーラスの単体分割

補足．単体複体のホモロジー群を計算するには，各単体 $|v_0 \cdots v_n|$ の向きを選ぶ必要があります．選び方は二通りありますが，どちらを選んでも計算結果に影響はありません．例えば，ある 2 単体の向きを $\langle v_0 v_1 v_2 \rangle$ のように選んだとき，もし $\partial_3 : C_3(K) \to C_2(K)$ の計算中に $\langle v_1 v_2 v_0 \rangle$ が現れたら $+\langle v_0 v_1 v_2 \rangle$ におきかえ，$\langle v_1 v_0 v_2 \rangle$ が現れたら $-\langle v_0 v_1 v_2 \rangle$ におきかえる，といったふうにすればよいわけです．

今回の問題 1. (3) や問題 3 のように，単体複体のホモロジーを実際に計算するのは一般的に大変です．その原因は，単体の集合が単体複体になるための条件がかなり厳しいことにより，一般的に単体複体はかなりたくさんの単体を含まなければならないことにあります．実際に計算するためには「胞体複体のホモロジー群」が便利です．胞体複体に関しては，講義の後半で触れるかもしれません．単体複体の範囲で問題 1. (3) を計算するには，σ^n を σ^{n-1} の「錐複体」とみなすとよいのですが，これについても時間に余裕がありそうなら講義で扱います．参考書の 58 ページを参照してください．