幾何学特別講義 IV レポート問題 2（2016 年 11 月 10 日）コメント

担当：境 圭一

n によらず答は全員同じで，$i=0,1$ に対し $H_i(K_n)\cong\mathbb{Z}$ です．$H_0(K_n)\cong\mathbb{Z}$ であることは，11/17 の講義でやったように，$|K_n|$ が弧状連結であることの帰結です．$H_1(K_n)\cong\mathbb{Z}$ の生成元，つまり $\pm1\in\mathbb{Z}$ に対応する元は

$$n=0\ :\ \langle v_1v_2\rangle+\langle v_2v_3\rangle+\langle v_3v_1\rangle,\quad n=1\ :\ \langle v_1v_2\rangle+\langle v_2v_3\rangle+\langle v_3v_4\rangle+\langle v_4v_1\rangle,\quad n=2\ :\ \langle v_1v_2\rangle+\cdots+\langle v_5v_6\rangle+\langle v_6v_1\rangle,$$

またはこれらの (-1) 倍です．$\langle v_iv_j\rangle$ を $\overrightarrow{v_iv_j}$ という矢印に対応させると，上記の生成元が向きの付いたループに対応することに注意してください．これも 11/17 の講義でやったことに対応しています．
答が全員同じであるのは，$|K_0|\simeq|K_1|\simeq|K_2|$ $(\simeq S^1)$（ホモトピー同値）であることが背景にあります．そのあたりは今後の講義で明らかになる予定です．

$\operatorname{Ker}\partial_0=C_0(K_n)$ であることから $H_0(K_n)=C_0(K_n)/\operatorname{Im}\partial_1$ で，何らかの基底に関する ∂_1 の表現行列を P とおく，つまり何らかの同型 $\varphi : C_1(K_n)\cong\mathbb{Z}^{\oplus6}$ と $\psi : C_0(K_n)\cong\mathbb{Z}^{\oplus6}$ に対し

$$\begin{tikzcd} C_1(K_n) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\varphi"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_0(K_n) \arrow[d, "\psi", "\cong"'] \\ \mathbb{Z}^{\oplus6} \arrow[r, "P"] & \mathbb{Z}^{\oplus6} \end{tikzcd}$$

となる行列 P を取れば，$H_0(K_n)$ は講義でやった「P が表す群」です．このことを言おうとしていると思われるのですが

$$C_1(K_n)P=C_0(K_n)\quad \text{とおく}$$

という記述がたくさん見られました．Abel 群に右から行列をかけると別の Abel 群になる，と言っているわけで，明らかに無意味です．誰かが最初に上のようなことを書き，そのコピーが出回っているのでしょう．
間違った記述をしていることは大した問題ではなく（少し問題ですが）**，正しいかそうでないかを自分で判断せず鵜呑みにして丸写ししているのは非常に恥ずかしいことです．**そういうことを誰かがした結果，社会的な大問題が起こったりしているのを，ニュース等でよく見るはずです．目先の試験の点数や単位にとらわれて，そういう人の真似をしてはいけません．[*1]
大学の数学のレポートや試験で少しくらい間違えたからといって，それが取り返しのつかない大問題を起こすとは到底考えられません（たくさん間違うと問題になることもありますが）．間違えても大して困らない今のうちに，しっかり自分で時間をかけて考える訓練をしておくことが大切です．もちろん誰とも接触せず一人でやるということではなく，誰かがやっていることを真似しながら考え，自分のものにしていくほうが効率よく物事を身につけられます．その場合も自分で消化するプロセスが大切で，深く考えず丸写ししているだけなら，その時間は全て無駄です．何となく単位は取れて卒業できるのかもしれませんが，そのあと必要になる力が欠落したままになってしまうことでしょう．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_homology/16_homology.html

[*1] 書いていて耳が痛い