幾何学特別講義 IV 演習問題 7（2016 年 11 月 17 日）

担当：境 圭一

問題 1. K は 1 次元単体複体で $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ をみたすとする．K が m 個の 0 単体を持つとき，K が持ちうる 1 単体の個数の範囲を求めよ．

問題 2. 単体複体 K_1, K_2 は $|K_1| \cap |K_2| = \{v_0\}$ をみたすとする．

(1) $K := K_1 \cup K_2$ とおくとき，K は単体複体であり，$|K|$ は v_0 における一点和 $|K_1| \vee |K_2|$ と同相であることを示せ．

(2) $i \geq 1$ に対し $H_i(K) \cong H_i(K_1) \oplus H_i(K_2)$ であることを示せ．$H_0(K)$ と $H_0(K_1) \oplus H_0(K_2)$ を比較せよ．（ヒント：講義でやった，チェイン複体の直和の議論を参考にせよ）

問題 3. K を単体複体とする．K の k 単体 $\sigma = |v_0 v_1 \cdots v_k|$ で，$\tau := |v_0 \cdots v_{k-1}|$ が他のどの単体の面にもなっていないものがあるとする．

(1) σ も他のどの単体の面にもなっていないことを示せ．

(2) $K' := K \setminus \{\sigma, \tau\}$ とするとき，K' も単体複体で，任意の $n \geq 0$ に対し $H_n(K) \cong H_n(K')$ であることを示せ．

補足．(1) 問題 3 のような状況のとき，K は σ に沿って K' に**つぶれる** (collapse) とか，$|K|$ と $|K'|$ は**単純ホモトピー同値** (simple homotopy equivalent) である，という言い方をします．$k = 1, 2$ くらいで絵を描いてみるといいでしょう．特に $k = 2$ のときが 11/17 の講義でやった内容に関係しています．ループ $\overrightarrow{v_0 v_1 v_2 v_0}$ に対応する $\langle v_0 v_1 \rangle + \langle v_1 v_2 \rangle + \langle v_2 v_0 \rangle \in C_1(K)$ はサイクルで，$H_1(K)$ の元を表しますが，これに対応するループは K' にはありません．しかしこのループは 2 次元曲面 $\langle \sigma \rangle$ の境界になっている，つまり $\langle v_0 v_1 \rangle + \langle v_1 v_2 \rangle + \langle v_2 v_0 \rangle = \partial_2 \langle \sigma \rangle$ であるため $H_1(K)$ の元として 0 ですから，$H_1(K) \cong H_1(K')$ だとしても何の不思議もないことになります．

(2) 前回やった「単体の向き」について補足します．0 単体の向きの入れ方はただ一通り，$\langle v \rangle$ だけです．これは例外で，$n \geq 1$ のとき，n 単体の向きの入れ方は二通りあり，講義ではこれらを $\langle v_0 v_1 v_2 \cdots v_n \rangle, \langle v_1 v_0 v_2 \cdots v_n \rangle$ と書きました．後者は $\langle v_1 v_0 v_2 \cdots v_n \rangle = \langle v_0 \cdots v_{n-2} v_n v_{n-1} \rangle$ とも書き直せます．1 単体の二通りの向き $\langle v_0 v_1 \rangle$ と $\langle v_1 v_0 \rangle$ は，文字通りの「線分の向き」と解釈することにするとわかりやすいでしょう．$n \geq 2$ のとき，n 単体の向きは以下のように捉えるとよいかもしれません：

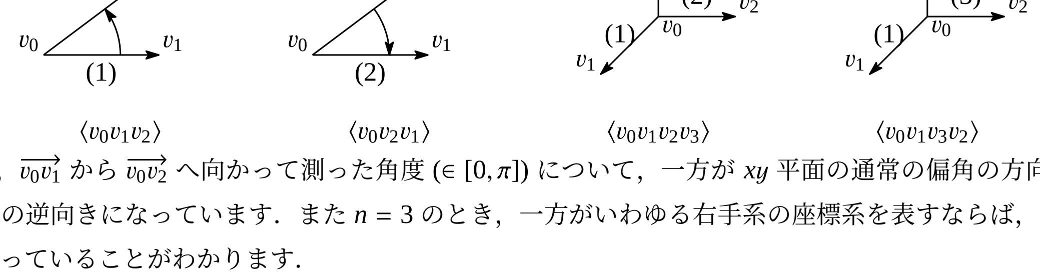
n 単体 $|v_0 \cdots v_n|$ の一つ目の向き $\langle v_0 v_1 \cdots v_n \rangle$ に対応して，順序づけられた n 個のベクトルの組

$$\overrightarrow{v_0 v_1}, \quad \overrightarrow{v_0 v_2}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{v_0 v_{n-2}}, \quad \overrightarrow{v_0 v_{n-1}}, \quad \overrightarrow{v_0 v_n}$$

を考えます．また，もう一つの向き $\langle v_0 \cdots v_{n-2} v_n v_{n-1} \rangle$ に対応して，順序づけられた n 個のベクトルの組

$$\overrightarrow{v_0 v_1}, \quad \overrightarrow{v_0 v_2}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{v_0 v_{n-2}}, \quad \overrightarrow{v_0 v_n}, \quad \overrightarrow{v_0 v_{n-1}}$$

を考えます．例えば $n = 2, 3$ の場合を図示すると以下の通りです．



$\langle v_0 v_1 v_2 \rangle$ $\quad$ $\langle v_0 v_2 v_1 \rangle$ $\quad$ $\langle v_0 v_1 v_2 v_3 \rangle$ $\quad$ $\langle v_0 v_1 v_3 v_2 \rangle$

$n = 2$ のとき，$\overrightarrow{v_0 v_1}$ から $\overrightarrow{v_0 v_2}$ へ向かって測った角度 $(\in [0, \pi])$ について，一方が xy 平面の通常の偏角の方向ならば，もう一方はその逆向きになっています．また $n = 3$ のとき，一方がいわゆる右手系の座標系を表すならば，もう一方は左手系になっていることがわかります．

このように，n 単体の向き，すなわち頂点の順序は，n 次元空間の向き ($n = 2$ なら偏角の向き，$n = 3$ なら右手系・左手系の区別，$\ldots$) に対応しています．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_homology/16_homology.html