幾何学特別講義 IV 演習問題 8（2016 年 11 月 24 日）

担当：境 圭一

問題 1. $v_0 = (0,0), v_1 = (1,0), v_2 = (0,1), v_3 = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ とおく．

(1) $K := \{|v_0|, |v_1|, |v_2|, |v_0v_1|, |v_1v_2|, |v_2v_0|\}$, $L := \{|v_0|, |v_1|, |v_2|, |v_3|, |v_0v_1|, |v_1v_2|, |v_2v_3|, |v_3v_0|\}$ について，$H_n(K), H_n(L)$ を計算せよ．

(2) 単体写像 $\Phi : K \to L$ を全て求めよ．それぞれについて，$\Phi_* : H_n(K) \to H_*(L)$ を具体的に記述せよ．

(3) 単体写像 $\Psi : L \to K$ を全て求めよ．それぞれについて，$\Psi_* : H_n(L) \to H_*(K)$ を具体的に記述せよ．

問題 2. n 単体 $\sigma^n := |v_0 \cdots v_n|$ の全ての面からなる単体複体を Δ^n と書き，$\partial\Delta^n := \Delta^n \setminus \{\sigma^n\}$ とする．

(1) $|\Delta^n| \approx \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$（$n$ 次元球体），$|\partial\Delta^n| \approx \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$（$n-1$ 次元球面）を示せ．

(2) $H_i(\Delta^2), H_i(\partial\Delta^2)$ を計算せよ．

(3) 単体写像 $\Phi : \Delta^2 \to \partial\Delta^2$ を全て求めよ．それぞれについて，$\Phi_* : H_i(\Delta^2) \to H_i(\partial\Delta^2)$ を具体的に記述せよ．

(4) 単体写像 $\Delta^n \to \partial\Delta^n$ について，上と同様のことを試みよ．

問題 3. $n \geq 2$ とし，$v_0 = (0,0,1), v_1 = (0,0,-1)$, $2 \leq k \leq n+1$ に対し $v_k := \bigl(\cos(2\pi(k-2)/n), \sin(2\pi(k-2)/n), 0\bigr) \in \mathbb{R}^3$ とおく．$K_n := \{|v_i|\}_{0\leq i\leq n+1} \cup \{|v_0v_1|\} \cup \{|v_jv_k|\}_{j=0,1,\ 2\leq k\leq n+1}$ は単体複体であることを示し，$H_l(K_n)$ を計算せよ．（ヒント：Mayer-Vietoris 完全系列を使い，n に関し帰納的に計算する）

問題 4. K を弧状連結な単体複体とし，$\epsilon : C_0(K) \to \mathbb{Z}$ を $\epsilon\Bigl(\sum_i a_i\langle v_i\rangle\Bigr) := \sum_i a_i$ で定義する（11/17 の講義でやった**添加写像**）．群の系列 $\widetilde{C}_*(K)$ を

$$\widetilde{C}_*(K) : \quad \cdots \longrightarrow C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

で定義する．$\widetilde{C}_*(K)$ はチェイン複体であることを示せ．$\widetilde{H}_n(K) := \ker\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1}$（ただし $\widetilde{C}_{-1}(K) := \mathbb{Z}, \partial_0 := \epsilon, \partial_{-1} := 0$ とする）とおくとき

$$\widetilde{H}_n(K) \cong \begin{cases} H_n(K) & n \geq 1 \\ 0 & n = 0, -1 \end{cases}$$

を示せ．K が弧状連結でない場合はどうか？

補足．Δ^n や $\partial\Delta^n$ のような基本的な単体複体ですら，定義通りにホモロジー群を計算するのは大変です．これらについては 12/1 に**錐複体**の例として扱いますが，あらかじめ定義通りやってみておくと，錐複体や Mayer-Vietoris 完全系列がいかにありがたいものかわかるかもしれません．

Mayer-Vietoris 完全系列を使うときによく現れる議論は次のものです：

完全列 $\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \longrightarrow \cdots$ において

(i) $f = 0$ なら（特に $A = 0$ なら）g は単射

(ii) $h = 0$ なら（特に $D = 0$ なら）g は全射

(iii) $f = 0, h = 0$ なら（特に $A = 0, D = 0$ なら）g は同型

です．もちろん (iii) は (i), (ii) の系です．講義でやったことではありますが，不安があれば復習しておいてください．単体複体 K を，ホモロジー群がよくわかっている部分複体 K_1, K_2 の和にうまく分けることができれば，上の (i)〜(iii) の議論を形式的に使うだけで，$H_*(K)$ は（全てではないにしても）かなり計算できます．ただし写像の具体的な中身をよく見ないとわからない部分もあることには注意が必要です．