幾何学特別講義 IV レポート問題 3（2016 年 12 月 1 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の数字の下二桁を 3 で割った余りを a $(= 0, 1, 2)$ とする．例えば 14S1098Z なら $a = 98 \mod 3 = 2$, 14S1076Y なら $a = 76 \mod 3 = 1$.

n は 3 以上の自然数とする．σ_i $(1 \le i \le 5)$ は n 単体で，次の (1), (2), (3) をみたすとする（図 1 参照）：

(1) $\sigma_1 = |v_0 \cdots v_n|$ とするとき，$\sigma_1 \cap \sigma_2 = |v_0 \cdots v_{n-1}|$, $\sigma_1 \cap \sigma_3 = |v_0 \cdots v_{n-2} v_n|$

(2) $\sigma_2 \cap \sigma_3 = |v_0 \cdots v_{n-2}|$

(3) σ_i と σ_j $(3 \le i < j \le 5)$ はちょうど一つの頂点のみを共有する

σ_i のすべての面からなる単体複体を $K(\sigma_i)$ $(\cong \Delta^n)$ と書き，

$$
\begin{aligned}
K_0 &:= (K(\sigma_1) \setminus \{\sigma_1\}) \cup (K(\sigma_2) \setminus \{\sigma_2\}),\\
K_1 &:= (K(\sigma_1) \setminus \{\sigma_1\}) \cup K(\sigma_2) \cup K(\sigma_3),\\
K_2 &:= K(\sigma_3) \cup K(\sigma_4) \cup K(\sigma_5)
\end{aligned}
$$

とおくとき，$k \ge 0$ に対し，$H_k(K_a)$ を計算せよ．

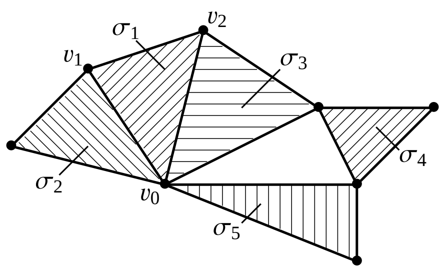

図 1　$n = 2$ の場合．実際は $n \ge 3$

※締切：12/8（木）の講義開始時

※代理提出可です．

※締切前の提出も受け付けます．研究室にお越しください．

幾何学特別講義 IV 演習問題 9（2016 年 12 月 1 日）

担当：境 圭一

※提出の必要はありません．レポート問題は裏面をご覧ください．

問題 1. K を n 次元単体複体とするとき，K の錐 $x * K$ は $(n+1)$ 次元単体複体で，K は $x * K$ の部分複体であることを示せ．K の k 単体の数を $b_k(K)$ $(k = 0, \ldots, n)$ とするとき，$b_k(x * K)$ $(k = 0, \ldots, n+1)$ を求めよ．

問題 2. K を単体複体とするとき，$|x * K|$ は可縮であることを示せ．（ヒント：包含写像 $\{x\} \mapsto |x * K|$ がホモトピー同値であることを示す）

問題 3. $v_0, \ldots, v_n$ は一般の位置にあるとし，$0 \le k \le n$ に対し $\sigma^k := |v_0 \cdots v_k|$ とおく．また $\Delta^n := \{\sigma^n \text{ の faces}\}$, $\partial\Delta^n := \Delta^n \setminus \{\sigma^n\}$, $K_1 := \Delta^{n-1} = \{\sigma^{n-1} \text{ の faces}\}$, $K_2 := \partial\Delta^n \setminus \{\sigma^{n-1}\}$ とおく．

(1) K_1, K_2 は $\partial\Delta^n$ の部分複体であり，$K_1 \cup K_2 = \partial\Delta^n$ であることを示せ．

(2) $K_1 \cap K_2 = \partial\Delta^{n-1}$ であることを示せ．

(3) $K_2 = v_n * (K_1 \cap K_2)$ であることを示せ．

(4) $n \ge 3$ とする．$\langle v_0 \rangle, \ldots, \langle v_{n-1} \rangle$ はいずれも $H_0(K_i) \cong \mathbb{Z}$ $(i = 1, 2)$ ならびに $H_0(K_1 \cap K_2) \cong \mathbb{Z}$ の生成元であることを示せ．また各 $k = 0, \ldots, n-1$ に対し，$(i_{1*}, i_{2*}) : H_0(K_1 \cap K_2) \to H_0(K_1) \oplus H_0(K_2)$ は $\langle v_k \rangle \mapsto (\langle v_k \rangle, \langle v_k \rangle)$ と表せることを示せ．（問題 6 も参照せよ）

問題 4. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle v_0 \cdots \overset{\wedge}{\underset{i}{\cdot}} \cdots v_n \rangle \in C_{n-1}(\partial\Delta^n)$ がサイクルであることを示せ．

問題 5. $H_*(\partial\Delta^1)$ を計算し，$H_*(\partial\Delta^n)$ $(n \ge 2)$ と比較せよ．

問題 6. K は単体複体で，$|K|$ は k 個の弧状連結成分を持つとする．各弧状連結成分に含まれる頂点を一つずつ（任意に）取り，それらを $v_1, \ldots, v_k$ とおくとき，$H_0(K) = \mathbb{Z}\langle\langle v_1 \rangle, \ldots, \langle v_k \rangle\rangle$ であることを示せ．

補足．$\partial\Delta^n$ を問題 2 のように分割して Mayer-Vietoris 完全系列を用いると，$H_{n-1}(\partial\Delta^n) \cong \mathbb{Z}$ であることが証明できます．この同型により $1 \in \mathbb{Z}$ に対応する $H_{n-1}(\partial\Delta^n)$ の元を v とおくと，$H_{n-1}(\partial\Delta^n)$ の任意の元は v の整数倍で表されます（$1 \in \mathbb{Z}$ が同じ性質を持つから）．このような元を生成元といいますが，$H_{n-1}(\partial\Delta^n)$ の生成元はどれか，ということは，Mayer-Vietoris 完全系列からは必ずしも明らかではありません．

問題 4 のサイクルは $Z_{n-1}(\partial\Delta^n)$ の 0 でない元で，明らかに $B_n(\partial\Delta^n) = 0$ ですから，$H_{n-1}(\partial\Delta^n) = Z_n(\partial\Delta^n)$ の 0 でない元を表すことはわかります．実は問題 4 のサイクルは生成元で，そのことは以下のようにしてわかります：

$\partial\Delta^n$ の $n-1$ 単体は $\dbinom{n+1}{n} = n+1$ 個，$\sigma_i := |v_0 \cdots \overset{\wedge}{\underset{i}{\cdot}} \cdots v_n|$ $(i = 0, \ldots, n)$ です．$x := \displaystyle\sum_{0 \le i \le n} a_i \langle \sigma_i \rangle \in Z_{n-1}(\partial\Delta^n)$ と仮定しましょう．二つの $n-1$ 単体 σ_i, σ_j $(i < j)$ は，ちょうど一つの $n-2$ 単体 $\sigma_{ij} := |v_0 \cdots \overset{\wedge}{\underset{i}{\cdot}} \cdots \cdots \overset{\wedge}{\underset{j}{\cdot}} \cdots v_n|$ を共通の面に持ち，σ_{ij} を面に持つ $n-1$ 単体は他にありません．よって $\partial_{n-1}(x)$ $(= 0)$ の計算の中に出てくる $\langle \sigma_{ij} \rangle$ の係数 $(= 0)$ は，符号に注意すると，$(-1)^{j+1} a_i + (-1)^i a_j$ $(= 0)$ であることがわかります．このことから $a_0 = -a_1 = a_2 = \cdots = (-1)^n a_n$ がわかり，x は問題 4 のサイクルの整数倍であることがわかりました．